

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR  
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID



DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS  
Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS

# FRAGMENTACIÓN DINÁMICA DE ANILLOS METÁLICOS DÚCTILES SOMETIDOS A EXPANSIÓN RADIAL

Proyecto Final de Carrera

---

Autor:

Damián Aranda Iglesias

Dirigido por:

José Antonio Rodríguez Martínez

Guadalupe Vadillo Martín



*Dedicado a  
mi familia*





# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Fragmentación dinámica, el ensayo de expansión de anillos . . . . .	4
<b>2. Objetivos y metodología</b>	<b>7</b>
<b>3. Fragmentación dinámica: teorías estadística y energética</b>	<b>9</b>
3.1. Modelización . . . . .	10
3.1.1. Teoría estadística de N.F.Mott . . . . .	10
3.1.2. Teoría energética de D.Grady y colaboradores . . . . .	19
3.2. Resultados . . . . .	24
<b>4. Fragmentación dinámica: análisis de perturbaciones</b>	<b>27</b>
4.1. Modelización . . . . .	27
4.1.1. Formulación . . . . .	28
4.1.2. Solución homogénea . . . . .	30
4.1.3. Análisis lineal de perturbación . . . . .	31
4.2. Resultados . . . . .	36
<b>5. Fragmentación dinámica: simulación por elementos finitos</b>	<b>41</b>
5.1. Modelización . . . . .	41
5.1.1. Mallado . . . . .	42
5.1.2. Incertidumbre y localización . . . . .	45
5.1.3. Criterio de fallo . . . . .	45
5.2. Resultados . . . . .	47
<b>6. Discusión</b>	<b>51</b>
<b>7. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>59</b>



# Capítulo 1

## Introducción

El comportamiento de estructuras sometidas a altas velocidades de deformación constituye un tema de interés creciente en la industria moderna, actualmente son muchas las situaciones en las que se somete a los materiales a cargas dinámicas, explosiones, choques o impactos. El caso más evidente lo constituyen las aplicaciones militares; por ejemplo: el diseño de blindajes, tanto para uso personal como para la protección de vehículos. Sin embargo, existen muchas otras ramas de la industria en las que tienen lugar estas condiciones de carga, como son:

- La industria aeronáutica y aeroespacial, donde encontramos varios casos de impacto, como los de desechos orbitales sobre estructuras espaciales, los choques de pájaros contra el fuselaje de los aviones o los impactos de los restos de un motor tras un fallo del mismo.
- En la industria de la automoción, el diseño frente a impacto de la carrocería de los vehículos ha llevado a desarrollar tanto estructuras de deformación programada, pensadas para absorber la energía del impacto, como estructuras rígidas que protejan a los ocupantes de un posible aplastamiento.
- Conocer los mecanismos que gobiernan el comportamiento de sólidos y estructuras a altas velocidades de deformación, tiene también un papel fundamental en los procesos de fabricación. Así, en la actualidad encontramos procesos como el conformado electromagnético, el electrohidráulico o los conformados por explosión, en los que se alcanzan velocidades de deformación superiores a  $10^3 s^{-1}$ .

En los ejemplos y aplicaciones anteriores, a diferencia de los casos estáticos, el tiempo se convierte en la variable fundamental del proceso, lo que da lugar a la aparición de determinados fenómenos característicos: al producirse un impacto se generan ondas de compresión en el punto de contacto, de forma que en los instantes inmediatamente posteriores al choque sólo una pequeña región alrededor de dicho punto se estará deformando, mientras que las zonas lejanas aún no estarán sometidas a sollicitación alguna. Estos fenómenos de propagación de ondas implican que la tensión y la deformación del material varían punto a punto y a lo largo del tiempo. Además, cuando estas ondas de compresión alcanzan los contornos libres del sólido se reflejan como ondas de tracción de magnitud similar.

Paralelamente, un porcentaje importante de la energía transmitida al sólido en el impacto se transforma en calor: a altas velocidades de deformación no hay tiempo para que se produzca

un flujo apreciable de calor con el exterior, por lo que la temperatura en la zona del impacto se eleva considerablemente. Por último, en los fenómenos de impacto las elevadas aceleraciones provocan que las fuerzas de inercia cobren un papel relevante, siendo imposible despreciar su efecto como se hace en los casos estáticos.

La caracterización dinámica de sólidos en estas condiciones de carga ha supuesto un reto para la mecánica experimental desde sus orígenes. En la actualidad existen multitud de experimentos y dispositivos desarrollados para tal fin. La figura 1.1 presenta los dispositivos más utilizados atendiendo a la velocidad de deformación que se alcanza en cada uno de ellos.

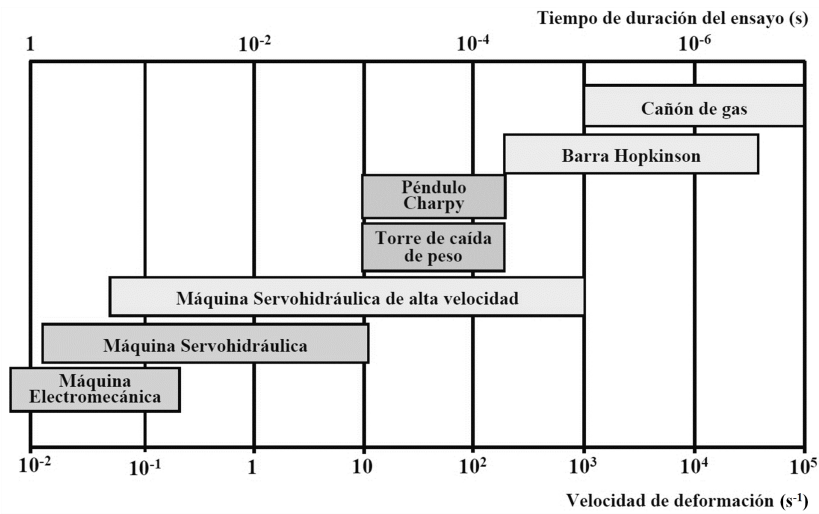


Figura 1.1: clasificación de los dispositivos experimentales según la velocidad de deformación

A velocidades medias de deformación ( $1s^{-1} < \dot{\epsilon} < 10^2s^{-1}$ ) encontramos el péndulo Charpy y la torre de caída de peso que se basan en consideraciones energéticas. Permiten efectuar ensayos de flexión como los ensayos Charpy, Izod, flexión biaxial o flexión en tres puntos y ensayos de tracción. En este rango de velocidades la respuesta de la estructura aún es global y la propagación de ondas, efectos inerciales y aspectos termodinámicos aún no son determinantes.

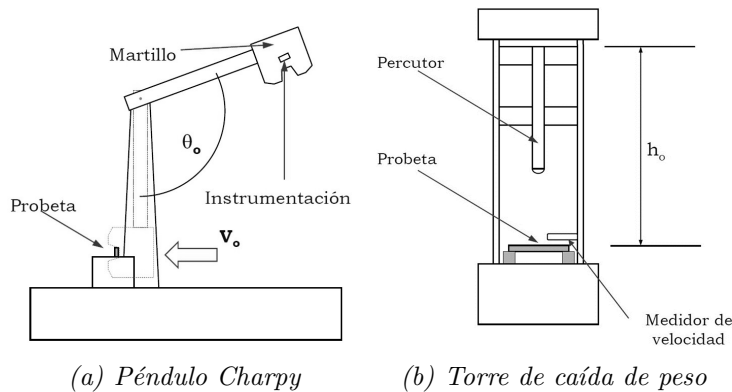


Figura 1.2: dispositivos para el ensayo dinámico de sólidos a velocidades medias de deformación

Si nos movemos al rango de altas velocidades de deformación ( $10^2 s^{-1} < \dot{\epsilon} < 10^4 s^{-1}$ ) la técnica experimental que goza de mayor aceptación entre los investigadores es, sin duda, la barra Hopkinson. Este dispositivo se basa en barras cilíndricas que actúan como guías de las ondas de tensión, permite una gran variedad de ensayos que van desde los más habituales de tracción compresión hasta los complejos ensayos de fractura dinámica.

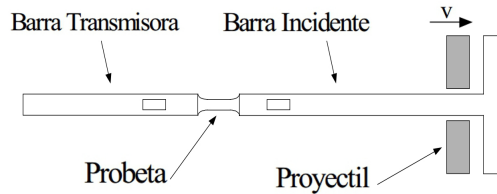


Figura 1.3: barra Hopkinson

Finalmente llegamos al rango de muy altas velocidades de deformación ( $\dot{\epsilon} > 10^4 s^{-1}$ ) que será el ámbito de estudio de este proyecto. Los ensayos mecánicos en estas condiciones son excepcionalmente complejos y tan solo un reducido grupo de laboratorios alrededor del mundo dispone de los equipos necesarios. Las dos técnicas más utilizadas son: el ensayo de impacto de placas y el ensayo de expansión de anillos.

El primero de ellos consiste en lanzar una placa plana montada sobre un casquillo contra una segunda placa estacionaria más delgada, se alcanzan velocidades de deformación de entre  $10^4 - 10^6 s^{-1}$  y, en sus distintas variantes, permite analizar la deformación del material, la propagación de ondas y el fallo dinámico. Por otra parte, el anillo expandible se basa en la aceleración radial repentina de un anillo metálico a través de campos electromagnéticos o cargas explosivas. Nuestra atención se centrará en esta última técnica, analizaremos en profundidad en qué consiste, qué procesos tienen lugar en el seno del material durante el ensayo y las distintas alternativas existentes para su modelización analítica y numérica. A continuación se presenta una descripción detallada de la misma.

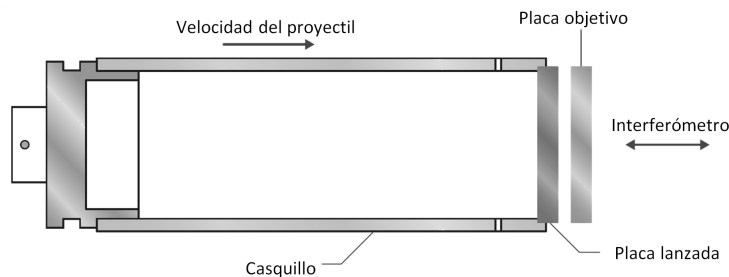


Figura 1.4: ensayo de impacto de placas (Sharpe, 2008)

## 1.1. Fragmentación dinámica, el ensayo de expansión de anillos

Niordson (1965) desarrolló un dispositivo para la expansión rápida de anillos delgados con el fin de determinar las propiedades del material a muy altas velocidades de deformación. El dispositivo consiste en un anillo metálico insertado alrededor de un solenoide, la figura 1.5.(a) muestra un esquema del montaje necesario. Cuando la corriente  $I_1$  recorre la bobina se genera una corriente inducida  $I_2$  en el anillo, la interacción entre ambas genera una fuerza repulsiva anillo-solenoide. El anillo se convierte rápidamente en un cuerpo libre que se expande radialmente hasta romperse. El ensayo se caracteriza por la fractura simultánea del anillo en múltiples puntos de su perímetro, este fenómeno es lo que se conoce como fragmentación dinámica.

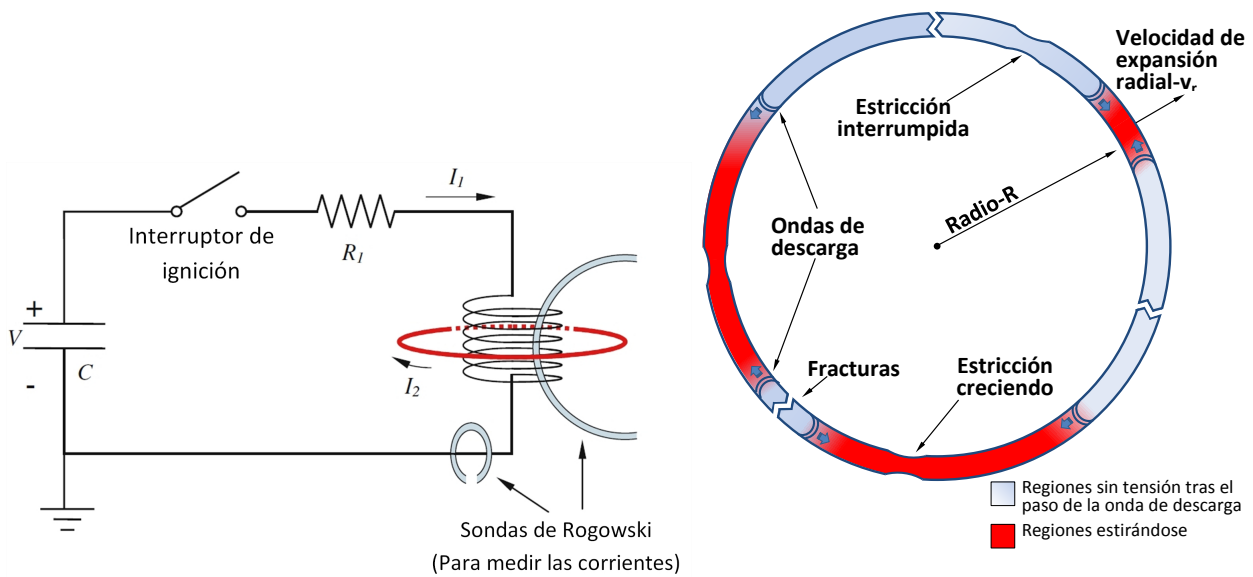


Figura 1.5: ensayo de expansión de anillos

En el proceso de expansión del anillo podemos distinguir las siguientes etapas:

- En primer lugar, el material se estira con una tensión y deformación uniformes a lo largo de todo el perímetro del anillo. Una ventaja de este dispositivo, frente a otros ensayos anteriormente descritos, reside en que debido a la simetría (tanto en la geometría como en las solicitaciones) se evita la aparición de ondas de carga.
- A partir de un cierto instante de tiempo, los defectos intrínsecos al sólido (geométricos, materiales...) propician que la tensión y la deformación se concentren en determinados puntos. Se pierde la homogeneidad del proceso y aparecen múltiples cuellos de estrangulación a lo largo del anillo.
- Finalmente, varias de estas estrangulaciones alcanzarán una deformación límite produciéndose la fractura. En este momento la zona próxima al punto de fractura se descargará, sin embargo, los puntos suficientemente alejados seguirán deformándose. La descarga de la tensión se propaga en forma de onda por el perímetro del anillo deteniendo el crecimiento de las estrangulaciones a su paso. La figura 1.5.(b) muestra un esquema del proceso.

Dentro del rango de velocidades alcanzables de forma experimental, típicamente entre 50 y 300 m/s, los resultados respaldan el proceso de expansión anteriormente descrito. Las imágenes tomadas por Zhang and Ravi-Chandar (2006) muestran el fenómeno empleando una cámara de alta velocidad (figura 1.6). En estos 10 fotogramas podemos diferenciar las siguientes etapas: del fotograma 1 al 3 el anillo se expande uniformemente; en el fotograma 4 podemos ver como se produce la primera fractura, que se detecta fácilmente ya que se genera un arco eléctrico en el punto en cuestión; hasta el fotograma 7 siguen apareciendo nuevas fracturas pero a partir de este momento el anillo queda completamente descargado y los fragmentos se mueven como sólidos independientes.

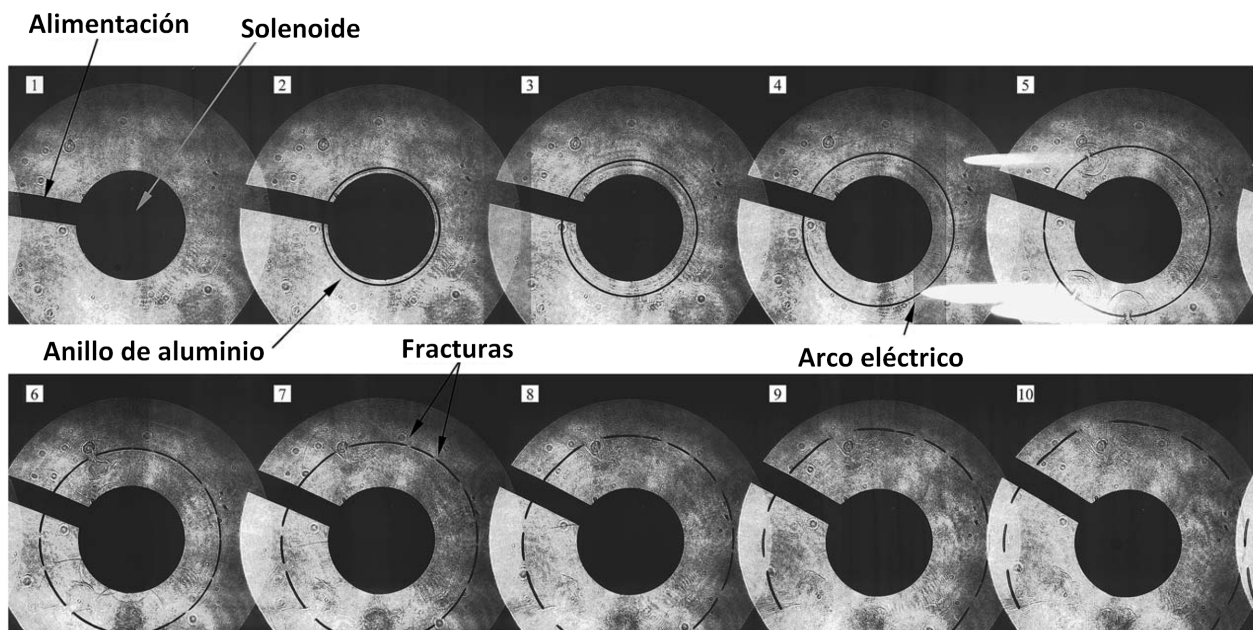


Figura 1.6: secuencia de expansión de un anillo de Al 6061-O (Zhang and Ravi-Chandar, 2006)

Siguiendo con las observaciones experimentales (Grady, 1982; Grady and Benson, 1983; Grady and Kipp, 1985, 1997) encontramos que el número de estricciones contabilizadas tras los ensayos excede al número de fracturas, lo cual cobra sentido cuando asumimos que las ondas de descarga frenan el crecimiento de las estricciones cercanas.

Han sido varios los intentos de modelizar el proceso que acabamos de describir y de reproducir analíticamente sus resultados. El marco teórico para el análisis de la estricción múltiple y fragmentación dinámica comienza con el trabajo de N.F.Mott desarrollado durante la Segunda Guerra Mundial (Mott, 1947). Mott propuso una modelización estadística del proceso en la que se trata la deformación a la que se produce la fractura como una variable aleatoria, además, el modelo descansa en la estimación de la velocidad a la que se propagan las ondas de relajación que emanan de cada fractura. Con su teoría, Mott fue capaz de determinar, a través de un elaborado método gráfico, las distribuciones estadísticas del tamaño de los fragmentos.

Posteriormente el trabajo de Mott ha sido continuado y ampliado por D. Grady y sus colaboradores (Grady, 2006) quienes desarrollan expresiones analíticas para las distribuciones de Mott, junto con una teoría alternativa basada en consideraciones energéticas.

En paralelo, el estudio del proceso de fragmentación ha sido abordado a través del análisis de bifurcación (Hill and Hutchinson, 1975) y estabilidad (Zhou et al., 2006). La primera de estas técnicas estudia el comportamiento de las soluciones de una familia de ecuaciones diferenciales ante pequeñas variaciones en los parámetros del sistema. Una bifurcación se da cuando una de estas pequeñas variaciones causa un cambio brusco de las soluciones. Por otra parte, el análisis de estabilidad trabaja con perturbaciones de las propias soluciones, analizando el comportamiento del sistema ante las mismas.

Por último, el ensayo ha sido tratado también desde la simulación mediante elementos finitos (Rusinek and Zaera, 2007; Vadillo et al., 2012; Rodríguez-Martínez et al., 2013a). La correcta modelización numérica del comportamiento del sistema: relación constitutiva del material, acumulación del daño, mallado, criterio de fallo, etc., supone un enorme campo de posibilidades que ha suscitado numerosos trabajos al respecto.

A lo largo de este trabajo se abordarán en profundidad las tres metodologías anteriores: teorías estadística y energética, análisis de estabilidad y simulación por elementos finitos. En cada caso analizaremos el rango de validez del modelo en base a sus suposiciones y trataremos de extraer información útil sobre los principios que rigen el fenómeno de fragmentación dinámica.



## Capítulo 2

# Objetivos y metodología

El presente proyecto busca desarrollar una visión integral del fenómeno de fragmentación dinámica unidimensional, abordando el ensayo de expansión de anillos desde tres ópticas diferentes:

- El punto de partida serán las teorías estadística (Mott, 1947) y energética (Grady, 2006). Cada una de ellas permitirá obtener, de forma independiente, una expresión analítica que relaciona el número de fragmentos obtenidos en el ensayo con la velocidad del mismo. A continuación, comparando estas dos expresiones análogas, llegaremos a conclusiones interesantes sobre la modelización y sobre el proceso.
- Otra óptica diferente es la que nos ofrece el análisis de estabilidad (Zhou et al., 2006). A diferencia de las teorías estadística y energética, el análisis de estabilidad no se centra en el momento en el que se producen las fracturas, sino que estudia un instante anterior en el que las heterogeneidades del sólido dan lugar a la concentración de tensión y la formación de estricciones.
- Cada uno de los modelos anteriores estudia una etapa distinta del proceso de fragmentación y ofrece resultados válidos para un determinado rango de velocidades. Un tercer enfoque, a través de la modelización numérica mediante el método de elementos finitos (Rusinek and Zaera, 2007), nos permitirá abarcar el fenómeno en su totalidad.

A través del análisis sistemático de los modelos anteriores buscamos: poner de manifiesto los principios que gobiernan el proceso en cada una de sus etapas y explicar como estos principios limitan la validez de las distintas teorías a rangos concretos de velocidades.

Como referencia común para todos los modelos trabajaremos con la siguiente geometría: anillo de sección cuadrada de 0.75 mm de lado y radio interno de 15 mm. Además, el material elegido en todos los casos uranio-6 %-niobio (U6N) será tratado como elástico perfectamente plástico. Esta configuración, basada en Grady and Olsen (2003), permitirá contrastar en todo momento nuestros resultados con los obtenidos experimentalmente .

La siguiente tabla resume las propiedades del U6N que se emplearán a lo largo de todo el documento:

Propiedades	Valor
Límite elástico ( $\sigma_0$ )	1000 <i>MPa</i>
Densidad ( $\rho$ )	17300 <i>Kg/m<sup>3</sup></i>
Módulo de Young ( $E$ )	174 <i>GPa</i>
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.3

*Tabla 2.1: propiedades del U6N*

El presente trabajo se estructura de la siguiente manera:

En primer lugar se presentan las teorías estadística de N.F.Mott y energética de D. Grady (Capítulo 3). Posteriormente, ambos modelos se implementan en un software desarrollado través de MATLAB R2012b a fin de automatizar el proceso. El correcto funcionamiento del programa se verifica contrastando los resultados con los obtenidos experimentalmente (Grady and Olsen, 2003; Grady, 2006).

El capítulo 4 aborda el problema a partir del análisis de estabilidad, siguiendo como referencia el artículo de Zhou et al. (2006). El software desarrollado con MATLAB R2012b se amplía para incluir también este modelo.

A continuación, el capítulo 5 presenta la modelización del ensayo de expansión de anillos mediante el método de los elementos finitos haciendo uso del programa comercial ABAQUS/Explicit 6.13 y siguiendo la metodología de Rusinek and Zaera (2007), igualmente se contrastarán los resultados con las evidencias experimentales.

El capítulo 6 compara los resultados obtenidos, se estudia la adaptación de los resultados numéricos, los modelos analíticos y los datos experimentales y se presenta una reflexión sobre los parámetros fundamentales que rigen el fenómeno de la fragmentación dinámica.

Por último, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones que pueden desprenderse de este proyecto final de carrera y se proponen algunas líneas de desarrollo para futuros trabajos.

## Capítulo 3

# Fragmentación dinámica: teorías estadística y energética

En este capítulo se presentan dos teorías que, aunque basadas en principios marcadamente distintos, han demostrado su capacidad para predecir adecuadamente los resultados experimentales: la teoría estadística de Mott y la teoría energética de Grady y sus colaboradores.

- La teoría estadística constituye el inicio del análisis teórico del proceso de fragmentación dinámica. Esta teoría proporciona una expresión que relaciona el número de fracturas obtenidas tras un ensayo con la velocidad a la que se realiza el mismo, además, Mott fue capaz de obtener de forma gráfica las distribuciones de probabilidad para las longitudes de los fragmentos.
- Por su parte, en un intento de complementar la teoría estadística, Grady desarrolla expresiones analíticas para las distribuciones de fragmentos. Así mismo, de esta reflexión surge una nueva teoría basada en principios energéticos que proporciona una expresión análoga a la anterior (relación del número de fragmentos con la velocidad).

Tras una descripción detallada de ambas teorías veremos como, comparando las expresiones obtenidas es posible aunar los principios energéticos y estadísticos, obteniendo una teoría más completa y llegando a conclusiones interesantes sobre la modelización del proceso.

Finalmente, se lleva a cabo la implementación de los cálculos necesarios en MATLAB R2012b, empleando los datos experimentales presentes en Grady (2006) para verificar el correcto funcionamiento del software.

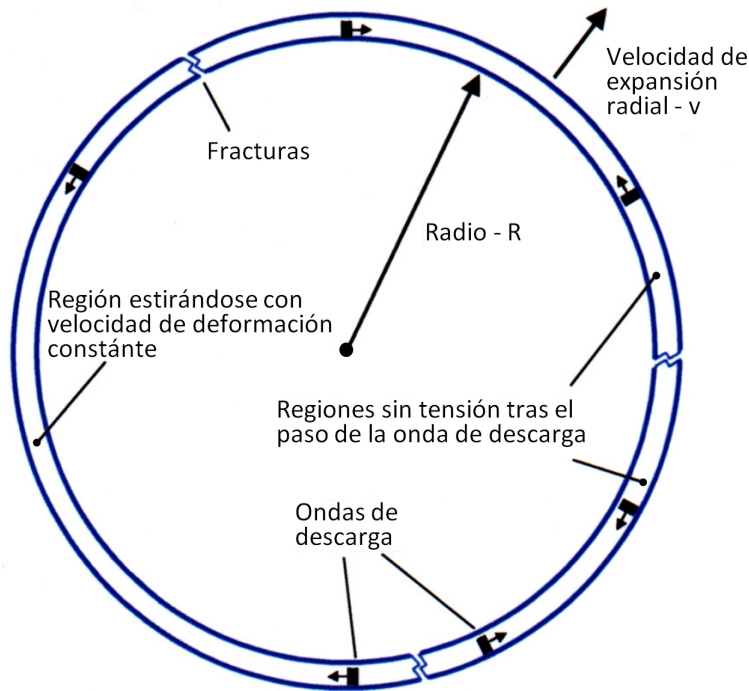
### 3.1. Modelización

#### 3.1.1. Teoría estadística de N.F.Mott

El análisis de fragmentación perseguido por Mott surge de su estudio de las bombas de tubo durante la Segunda Guerra Mundial. Aunque estas explosiones son multidimensionales, Mott se centra en determinar la distribución circunferencial de fracturas, despreciando lo que ocurra en la dirección axial de tubo. Así, el problema de las bombas de tubo puede entenderse de forma completamente análoga al ensayo de expansión de anillos que nos ocupa.

Nuestro punto de partida será el esquema mostrado en la figura 3.1: apreciamos cómo el anillo se expande radialmente con una velocidad  $v$  y cómo esto provoca una deformación en dirección circunferencial  $\varepsilon$ , tal que  $\varepsilon = \dot{\varepsilon}t$ . La primera hipótesis de este modelo consistirá en suponer la velocidad de deformación  $\dot{\varepsilon}$  constante.

Como ya hemos comentado, esta teoría analiza la última etapa de la expansión en la que aparecen las fracturas y se generan las correspondientes ondas de descarga; dichas ondas se propagan por el anillo deteniendo el crecimiento de las estricciones a su paso.



*Figura 3.1: anillo en expansión de Mott (Grady and Olsen, 2003)*

La teoría de fragmentación dinámica de Mott se basa en la modelización de los dos fenómenos que tienen lugar en esta etapa: la aparición de las fracturas y la propagación de las ondas de descarga.

En primer lugar, supondremos que la aparición de las fracturas es un fenómeno aleatorio y que por tanto, se puede modelar adecuadamente mediante expresiones estadísticas; además, consideraremos este proceso como instantáneo, es decir, que la tensión se reduce a cero en el

punto de rotura de forma repentina. Esto supondrá ignorar la resistencia a la fractura del material y la energía consumida durante el proceso.

La segunda cuestión a tratar será la naturaleza de las ondas de descarga, el objetivo es estimar a qué velocidad se propagan por el anillo.

A la vista de lo anterior, los pasos a seguir en el desarrollo de esta teoría serán:

- Determinar una expresión estadística que gobierne la aparición de las fracturas. Esta función, que llamaremos de activación, contempla tanto la posición a lo largo del perímetro del anillo como el instante temporal en que ocurren las fracturas.
- En segundo lugar, estimaremos a qué velocidad se transmiten las ondas de descarga.
- Conocida la velocidad de propagación, plantearemos una expresión que indique la fracción del anillo que se encuentra cargada en cada instante de tiempo. En esta fracción no relajada del anillo será donde puedan seguir apareciendo fracturas.
- Multiplicando la expresión de la fracción no relajada por la función de activación e integrando a lo largo del tiempo, obtendremos el número total de fracturas, o lo que es lo mismo, el número de fragmentos.

### 3.1.1.1. Activación de la fractura

Suponemos que las fracturas ocurren aleatoriamente tanto en el tiempo como en la posición a lo largo del perímetro del anillo y que este fenómeno se puede modelar adecuadamente a partir de principios estadísticos. Si tomamos como variable aleatoria la deformación para la cual ocurre la primera fractura, podemos definir las siguientes funciones estadísticas en relación con la misma:

- Función de distribución  $F(\varepsilon)$ : proporciona la probabilidad de que la deformación a la que ocurre la fractura sea menor que un determinado valor.
- Función de supervivencia  $S(\varepsilon) = 1 - F(\varepsilon)$ : se define como complementaria a la anterior y proporciona la probabilidad de que la deformación a la que se produce la fractura sea mayor a un determinado valor.
- Función de densidad de probabilidad  $f(\varepsilon) = \frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ : puede entenderse como la probabilidad de que la deformación a la que se produce la fractura pertenezca a un intervalo  $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ .
- Finalmente llegamos a la función que nos interesa, la función de riesgo: esta función se define como  $h(\varepsilon) = \frac{f(\varepsilon)}{S(\varepsilon)}$  y proporciona la probabilidad de que ocurra un determinado suceso, en nuestro caso la fractura, para un intervalo concreto de la variable aleatoria, en nuestro caso la deformación; así,  $h(\varepsilon)d\varepsilon$  será la probabilidad de que ocurra una fractura en un intervalo de deformación  $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ . Como la velocidad de deformación es constante,  $h$  puede expresarse indistintamente como función del tiempo o de la deformación  $\varepsilon = \dot{\varepsilon} t$ .

Las formas funcionales para  $h(\varepsilon)$  propuestas por Mott son dos:

$$h(\varepsilon) = \frac{n}{\sigma} \left( \frac{\varepsilon}{\sigma} \right)^{n-1} \quad \text{Ley potencial} \quad (3.1)$$

$$h(\varepsilon) = \frac{1}{\beta} e^{(\varepsilon-\mu)/\beta} \quad \text{Ley exponencial} \quad (3.2)$$

En las expresiones anteriores  $n$ ,  $\sigma$ ,  $\beta$  y  $\mu$  serán parámetros que deben ajustarse experimentalmente para cada material. Cada una de estas funciones de riesgo estará relacionada con una función de distribución y densidad específicas que se calculan de la siguiente manera:

$$h(\varepsilon) = \frac{f(\varepsilon)}{S(\varepsilon)} \Rightarrow \int \frac{dF}{1-F} = \int h(\varepsilon) d\varepsilon \Rightarrow F(\varepsilon) = 1 - e^{-\int h(\varepsilon) d\varepsilon}$$

Así, la función de riesgo potencial conduce a la función de densidad conocida como Weibull, mientras que la exponencial está relacionada con la función de Gumbel. Estas funciones de densidad indican la distribución estadística de la deformación de fallo:

$$f(\varepsilon) = \frac{n}{\sigma} \left( \frac{\varepsilon}{\sigma} \right)^{n-1} e^{-(\varepsilon/\sigma)^n} \quad \text{Función de densidad de Weibull} \quad (3.3)$$

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{1}{\beta}(\varepsilon - \mu) - e^{(1/\beta)(\varepsilon - \mu)}\right) \quad \text{Función de densidad de Gumbel} \quad (3.4)$$

Para determinar los parámetros anteriores ( $n$ ,  $\sigma$ ,  $\beta$  y  $\mu$ ), Mott propone el siguiente método: realizaremos una serie de ensayos de tracción uniaxial, midiendo en cada caso la deformación a la que se produce la fractura; a continuación, calculamos la media y la desviación estándar de nuestras mediciones e igualamos los valores con la media y la desviación estándar de las distribuciones de Weibull o Gumbel, esto permitirá despejar los parámetros deseados.

A modo de ejemplo, la figura 3.2 muestra cuatro ensayos de tracción realizados para el acero. Si quisiéramos obtener los parámetros de Gumbel: la desviación estándar de dicha distribución vale aproximadamente  $1,283\beta$  y la obtenida en los ensayos 14,83. Igualando ambos valores obtenemos el parámetro  $\beta = 11,56$ ; por otra parte, la media de Gumbel vale  $\mu - 0,577\beta$  y la de los ensayos 29,26, de donde se deduce que  $\mu = 6,96$ .

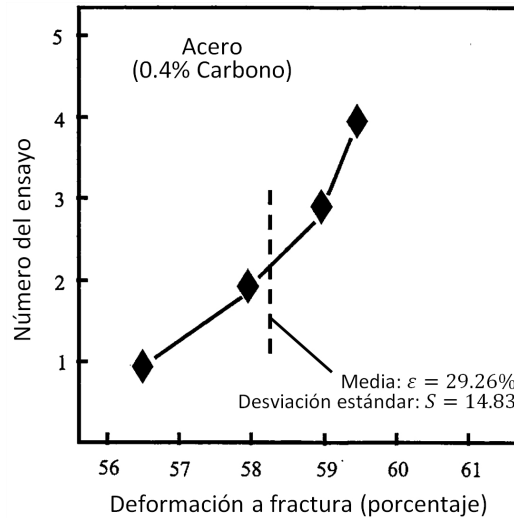


Figura 3.2: ensayos de tracción para determinar los coeficientes experimentales, (Mott, 1943)

En nuestro caso, para el resto del desarrollo elegiremos la función de activación potencial y por tanto, la función de densidad de Weibull asociada. En este punto cabe destacar que, como se discute en Grady (2006), no existe gran diferencia entre elegir una función u otra. Siguiendo el mismo método que acabamos de ejemplificar, concluimos que los parámetros de Weibull para el caso del U6N son  $\sigma = 7,7 \cdot 10^{-5}$  y  $n = 1$ .

### 3.1.1.2. Velocidad de propagación de las ondas

El siguiente paso en nuestro desarrollo consiste en estimar la velocidad de propagación de las ondas de descarga. Aunque la descarga del material es siempre elástica, existen dos posibilidades según consideremos que el material permanece en régimen elástico en el instante de la fractura, o que éste ya ha plastificado.

En el primer caso, no hay duda de que la velocidad de propagación de una onda elástica es  $c = \sqrt{E/\rho}$  y por tanto, el espacio recorrido por la onda en función del tiempo es:

$$x(t) = \sqrt{\frac{E}{\rho}} t \quad \text{Espacio recorrido por las ondas elásticas} \quad (3.5)$$

Sin embargo, no parece muy apropiado suponer que el material no plastifica antes de fracturarse. La complicación surge al estimar el espacio que recorre una onda de descarga si consideramos que comienza a propagarse una vez el material ha plastificado; para ello recurrimos a la siguiente idealización, imaginemos una barra metálica con dos sistemas de coordenadas, uno Lagrangiano  $H$  y otro Euleriano  $h$  (ver figura 3.3). Uno de los extremos de la barra permanece fijo mientras el material se estira uniformemente con una velocidad de deformación constante  $\dot{\epsilon}$ , la tensión en todos los puntos será igual al límite elástico  $Y$ .

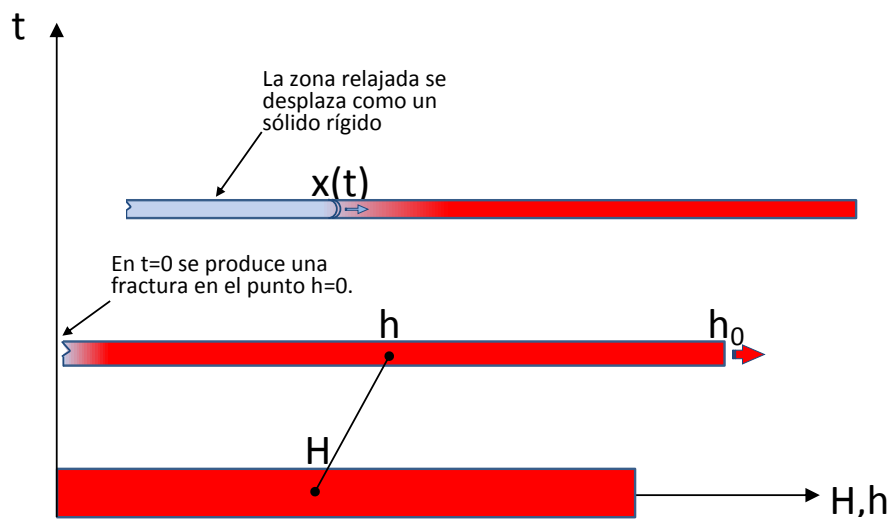


Figura 3.3: estimación de la velocidad de las ondas de descarga una vez el material ha plastificado

Supongamos que en  $t = 0$  se produce una fractura en el punto  $h = 0$  y se genera una onda de descarga que se propaga por la barra, siendo  $x(t)$  el espacio recorrido por la misma. Los puntos a la izquierda de la interfase  $0 \leq h \leq x(t)$  ya estarán descargados y se moverán como un sólido rígido a la misma velocidad que la onda, mientras, el resto de la barra se seguirá deformando con  $\dot{\varepsilon}$  constante. El campo de velocidades queda por tanto de la siguiente manera:

$$v(h, t) = \begin{cases} \dot{\varepsilon}x(t) & \text{si } 0 \leq h \leq x(t) \\ \dot{\varepsilon}h & \text{si } x(t) \leq h \leq h_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

donde  $h_0$  es la coordenada Euleriana del extremo libre de la barra. Conocido el campo de velocidades calculamos el momento lineal  $p$ :

$$p = m \cdot v = \underbrace{\rho A x \cdot \dot{\varepsilon} x}_{\text{Región descargada}} + \underbrace{\int_x^{h_0} \rho A h \cdot \dot{\varepsilon} dh}_{\text{Región sin descargar}} = \frac{1}{2} \rho A \dot{\varepsilon} (x^2 + h_0^2) \quad (3.7)$$

donde  $A$  es la sección transversal de la barra. Planteando el balance de cantidad de movimiento obtendremos una ecuación diferencial para  $x$ :

$$F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow \rho \dot{\varepsilon} x \frac{dx}{dt} = Y \quad (3.8)$$

Al integrar la ecuación 3.8 llegamos por fin a la expresión del espacio recorrido por las ondas de descarga:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2Yt}{\rho\dot{\varepsilon}}}, \text{ o lo que es lo mismo } x(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2Y\varepsilon}{\rho\dot{\varepsilon}}} \quad (3.9)$$

Será esta expresión de  $x(\varepsilon)$  la que consideremos en los desarrollos siguientes.

### 3.1.1.3. Relajación de la tensión

Llegados a este punto ya hemos determinado la función de activación  $h(\varepsilon)$  y la expresión del espacio recorrido por las ondas de descarga  $x(\varepsilon)$ . Con esta información podemos concretar la función de relajación de tensión. Esta función indica, para cada instante de tiempo, qué fracción del anillo ha sido alcanzado por las ondas de descarga; queda como sigue:

$$D(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon 2x(\varepsilon - \eta)h(\eta)d\eta \quad (3.10)$$

Donde  $h(\eta)d\eta$  es el número de fracturas activadas en el intervalo de deformación  $\eta$ ,  $\eta + d\eta$  por unidad de longitud y la función  $x(\varepsilon - \eta)$  es la distancia viajada por la onda de relajación en el intervalo de deformación  $\varepsilon - \eta$ . Al multiplicar el número de fracturas por la distancia recorrida por las ondas e integrar, estamos calculando la fracción relajada, sin olvidarnos de multiplicar por 2 ya que cada fractura genera dos ondas, una en cada sentido (ver figura 3.4).



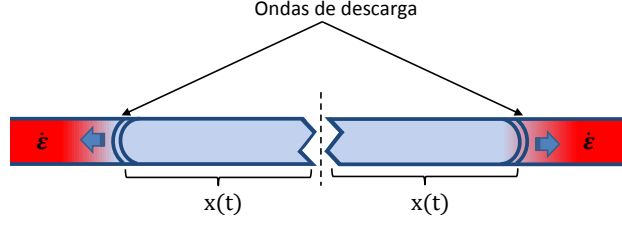


Figura 3.4: cada fractura genera dos ondas en sentidos opuestos

Sin embargo, un análisis de la función  $D(\varepsilon)$  demuestra que ésta puede exceder la unidad para un valor suficientemente alto de deformación. Este resultado carece de significado físico y es debido a que hay dos factores que no se han considerado aún: en primer lugar, la función de activación  $h(\varepsilon)$  no contempla que en las zonas relajadas ya no se pueden producir fracturas; y segundo, la función de propagación  $x(\varepsilon)$  no tiene en cuenta la posible interacción (constructiva o destructiva) entre las ondas de descarga.

Para tener en cuenta estos fenómenos se propone la función  $D'(\varepsilon)$ , completamente análoga a la anterior pero que se aproxima a la unidad a medida que la deformación crece:

$$D'(\varepsilon) = 1 - e^{-D(\varepsilon)} \quad (3.11)$$

#### 3.1.1.4. Predicción del número de fracturas

A la vista de la expresión 3.11;  $1 - D'(\varepsilon)$  será la fracción del anillo donde todavía es posible que se produzcan fracturas; así, multiplicando  $1 - D'(\varepsilon)$  por la función de activación  $h(\varepsilon)$  e integrando en el tiempo (o lo que es lo mismo en deformación), obtendremos el número de fracturas ocurridas hasta un determinado momento:

$$N(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon [1 - D'(\eta)] h(\eta) d\eta \quad (3.12)$$

Para obtener el número total de fracturas tras la realización del ensayo seguiremos los siguientes pasos:

- En primer lugar introducimos las expresiones 3.1 (función de activación) y 3.9 (velocidad de propagación de las ondas) en la expresión 3.10 (relajación de la tensión):

$$D = \int_0^\varepsilon 2x(\varepsilon - \eta)h(\eta)d\eta = 2\sqrt{\frac{2Y}{\rho\dot{\varepsilon}^2}} \frac{n}{\sigma^n} \int_0^\varepsilon \sqrt{\varepsilon - \eta} \cdot \eta^{n-1} d\eta \quad (3.13)$$

realizando el cambio de variable  $y = \eta/\varepsilon$  nos queda:

$$D = 2\sqrt{\frac{2Y}{\rho\dot{\varepsilon}^2}} \frac{n}{\sigma^n} \varepsilon^{n+1/2} \int_0^1 \sqrt{1-y} \cdot y^{n-1} dy \quad (3.14)$$

La integral anterior tiene solución en términos de la función Gamma  $\Gamma$ :

$$\int_0^1 \sqrt{1-y} \cdot y^{n-1} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2n+1} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1/2)} \quad (3.15)$$

siendo  $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$ . Así, tenemos que:

$$D(\varepsilon) = 2 \sqrt{\frac{2Y}{\rho \dot{\varepsilon}^2}} \frac{\varepsilon^{n+1/2}}{\sigma^n} \frac{n\sqrt{\pi}}{2n+1} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1/2)} \quad (3.16)$$

- Una vez conocida  $D$  es inmediato que  $D'(\varepsilon) = 1 - e^{-D(\varepsilon)}$ . Introduciendo  $D'$  en la expresión 3.12 volveremos a integrar, en esta ocasión, como nos interesa conocer el número total de fracturas integraremos desde 0 a  $\infty$ .

$$N = \int_0^\infty [1 - D'(\eta)] h(\eta) d\eta = \int_0^\infty e^{-D(\eta)} \cdot \frac{n}{\sigma} \left(\frac{\eta}{\sigma}\right)^{n-1} d\eta \quad (3.17)$$

La integral anterior nos proporciona el número total de fracturas, o lo que es lo mismo, el número total de fragmentos. La solución queda nuevamente en términos de la función Gamma:

$$N = \beta_n \left( \frac{\rho \dot{\varepsilon}^2 n}{2\pi Y \sigma} \right)^{n/(2n+1)} \quad (3.18)$$

donde:

$$\beta_n = \left( \frac{2n}{2n+1} \right)^{1/(2n+1)} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n)} \right)^{2n/(2n+1)} \Gamma \left( \frac{2n}{2n+1} \right) \quad (3.19)$$

Así, la expresión 3.18 representa el número total de fragmentos por unidad de longitud tras el ensayo. Para un valor suficientemente alto de  $n$ , observamos que  $\beta_n$  tiende a uno y el exponente  $n/(2n+1)$  tiende a un medio, mostrándose una relación lineal entre el número de fracturas y la velocidad de deformación.

### 3.1.1.5. Distribuciones de fragmentos

Como decíamos al inicio de este capítulo, la teoría de Mott proporciona, además del número de fragmentos (expresión 3.18), la distribución estadística del tamaño de éstos. Esta distribución fue calculada inicialmente de forma gráfica por Mott, sin embargo la expresión analítica para la misma ha sido aportada por Grady para el caso concreto de  $n=1$  (válida por tanto para el material que estamos empleando U6N). Es necesario fijar  $n=1$  para poder alcanzar una solución analítica cerrada.

La deducción de la función de densidad de probabilidad para la distribución en el tamaño de los fragmentos parte de la siguiente idea: si la tasa de activación de fracturas es  $h(\varepsilon)$ , y dado que en cada fractura se generan dos ondas, podemos asumir que la tasa de activación de ondas de descarga será  $2 \cdot h(\varepsilon)$ . A la vista de lo anterior, el número de ondas activas en el anillo en un determinado instante de tiempo y por unidad de longitud será:

$$N_w(\varepsilon) = 2(1 - D'(\varepsilon)) \int_0^\varepsilon h(\eta) d\eta \quad (3.20)$$

Al incluir  $1 - D'(\varepsilon)$  en la expresión anterior, estamos teniendo en cuenta que las fracturas, y por tanto las ondas, sólo pueden generarse en la fracción no relajada del anillo. Sin embargo, existe otro fenómeno que aún no hemos considerado: como podemos ver en la figura 3.5, las ondas generadas en los extremos de un mismo fragmento interfieren en algún punto del mismo anulándose.

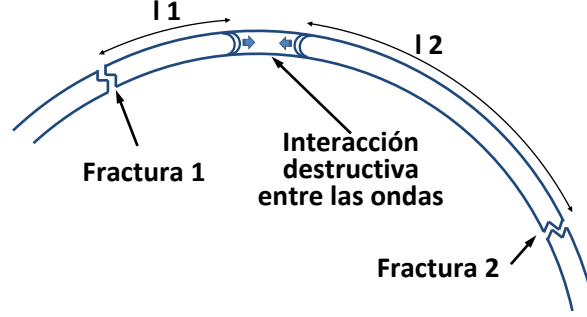


Figura 3.5: las ondas generadas desde las fracturas 1 y 2 viajan distancias  $l_1$  y  $l_2$  antes de eliminarse entre sí. La suma de las distancias recorridas  $l_1 + l_2$  será el tamaño del fragmento

Para tener esto en cuenta, debemos entender primero como se crean y destruyen las ondas. Derivando la expresión 3.20 respecto de la deformación, obtendremos como varía el número de ondas activas con el tiempo, lo que permitirá identificar cuántas ondas se crean y cuántas se destruyen por interacción mutua en un instante concreto:

$$\frac{dN_w}{d\varepsilon} = 2e^{-D(\varepsilon)}h(\varepsilon) - 2e^{-D(\varepsilon)} \int_0^\varepsilon h(\eta) d\eta \cdot \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \quad (3.21)$$

La expresión anterior se puede reescribir como:

$$\frac{dN_w}{d\varepsilon} = \underbrace{2e^{-D(\varepsilon)}h(\varepsilon)}^{I^+} - \underbrace{2e^{-D(\varepsilon)} \int_0^\varepsilon h(\eta) d\eta}_{N_w} \cdot \underbrace{\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}}_{I^-} = I^+ - N_w I^- \quad (3.22)$$

donde  $I^+$  será el número de ondas generadas entre el instante  $\varepsilon$  y  $\varepsilon + d\varepsilon$ ; e  $I^-$  será la proporción de las ondas activas  $N_w$  que se destruyan en ese mismo instante.

Imaginemos ahora dos instantes de tiempo  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ . El número de ondas que se generan en  $\varepsilon_1$  es:

$$\delta N_0 = I^+(\varepsilon_1) \cdot d\varepsilon_1 \quad (3.23)$$

Supongamos que de esas  $\delta N_0$  ondas, sobreviven  $\delta N$  hasta el instante  $\varepsilon_2$ . De esas  $\delta N$ , en el instante  $\varepsilon_2$  se destruirán:

$$d(\delta N) = -\delta N \cdot I^-(\varepsilon_2) \cdot d\varepsilon_2 \quad (3.24)$$

Integrando la expresión anterior obtenemos:

$$\ln \delta N = \int I^-(\varepsilon_2) \cdot d\varepsilon_2 \Rightarrow \delta N = -C \cdot e^{D(\varepsilon_2)} \quad (3.25)$$

donde C es la constante de integración y se calcula imponiendo que  $\delta N(\varepsilon_1) = dN_0$

$$C e^{-D(\varepsilon_1)} = I^+(\varepsilon_1) d\varepsilon_1 \Rightarrow C = \frac{I^+(\varepsilon_1)}{e^{-D(\varepsilon_1)}} d\varepsilon_1 \quad (3.26)$$

Así, obtenemos  $\delta N$  que será el número de ondas de descarga que, generadas en  $\varepsilon_1$ , sobreviven hasta  $\varepsilon_2$ .

$$\delta N = I^+(\varepsilon_1) e^{D(\varepsilon_1)-D(\varepsilon_2)} d\varepsilon_1 \quad (3.27)$$

Sin embargo, lo que nos interesa es conocer de esas  $\delta N$  cuántas se destruyen en  $\varepsilon_2$ , para ello, introducimos 3.27 en 3.24.

$$d(\delta N) = I^+(\varepsilon) e^{D(\varepsilon_1)-D(\varepsilon_2)} I^-(\varepsilon_2) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \quad (3.28)$$

La expresión 3.28 proporciona el número de ondas generadas en  $\varepsilon_1$  y destruidas en  $\varepsilon_2$ . Realizando el cambio de variable  $x = \frac{c}{\varepsilon}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ , donde x es la distancia recorrida por la onda en el intervalo  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$  y c es la velocidad de propagación que hemos estimado en el apartado 3.1.1.2,  $c = \sqrt{2Y/\rho}$ , podemos llegar a una expresión para  $dN/dx$ . Sustituyendo apropiadamente las funciones  $D(\varepsilon)$  y  $h(\varepsilon)$  desarrolladas en los apartados anteriores se obtiene:

$$\frac{1}{x} \frac{dN}{dx} = \frac{-4n}{\sigma^n} \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{c} \right)^2 \left( \frac{\dot{\varepsilon}x}{c} \right)^{2n-1} \int_b^\infty [(y/b)^{2/(2n+1)} - 1]^{n-1} e^{-y} dy \quad (3.29)$$

La expresión anterior no tiene solución analítica para cualquier n, sin embargo, para n=1 sí es posible resolver, llegando a la siguiente expresión que indica la densidad de probabilidad de que una onda recorra una distancia x:

$$p(x) = \gamma \frac{x}{x_0^2} e^{-(x/x_0)^3} dx \quad (3.30)$$

Donde  $\gamma$  es un parámetro dependiente de la función Gamma:  $\gamma = 3/\Gamma(2/3)$ ; y  $x/x_0$  es la longitud adimensional de los fragmentos, siendo  $x_0 = (2\sigma Y/2\rho\dot{\varepsilon}^2)^{1/3}$ .

Finalmente, dado que la longitud del fragmento estará compuesta por la distancia recorrida por las dos ondas de sus extremos, tal y como se muestra en la figura 3.5, deberemos componer la función de densidad como se sigue:

$$f(x)dx = \int_{x_1+x_2} p(x_1)p(x_2)dx_1dx_2 \quad (3.31)$$

La distribución de densidad de probabilidad queda:

$$f(x) = \frac{\gamma^2}{4} \frac{1}{x_0} \left( \frac{x}{x_0} \right)^3 e^{-\frac{1}{4}(x/x_0)^3} \int_0^1 (1-y^2) e^{-\frac{3}{4}(x/x_0)^3 y^2} dy \quad (3.32)$$

Donde, nuevamente,  $\gamma$  es un parámetro dependiente de la función Gamma:  $\gamma = 3/\Gamma(2/3)$  y  $x/x_0$  es la longitud adimensional de los fragmentos, siendo  $x_0 = (2\sigma Y/2\rho\dot{\varepsilon}^2)^{1/3}$ .

### 3.1.2. Teoría energética de D.Grady y colaboradores

Esta teoría se basa en principios marcadamente distintos a los de la anterior: mientras Mott asume que la fractura ocurre instantáneamente y que la energía consumida por ésta es irrelevante, Grady y sus colaboradores plantean la disipación de energía y el tiempo de fractura como elementos fundamentales de su teoría.

#### 3.1.2.1. Análisis del proceso de fractura

La caracterización de un proceso de fractura bajo las condiciones de carga y deformación que nos ocupan se encuentra dentro del ámbito de la Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica. Como consecuencia de la plastificación se produce un enromamiento del frente de fisura, siendo la apertura del dicho frente (CTOD, Crack Tip Opening Displacement) un parámetro apropiado para describir el fenómeno.

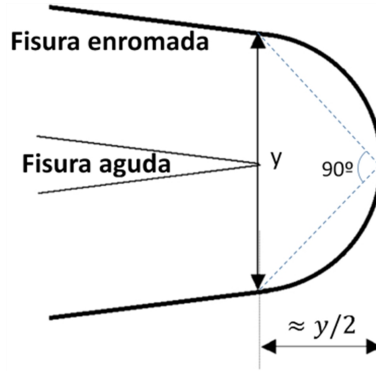
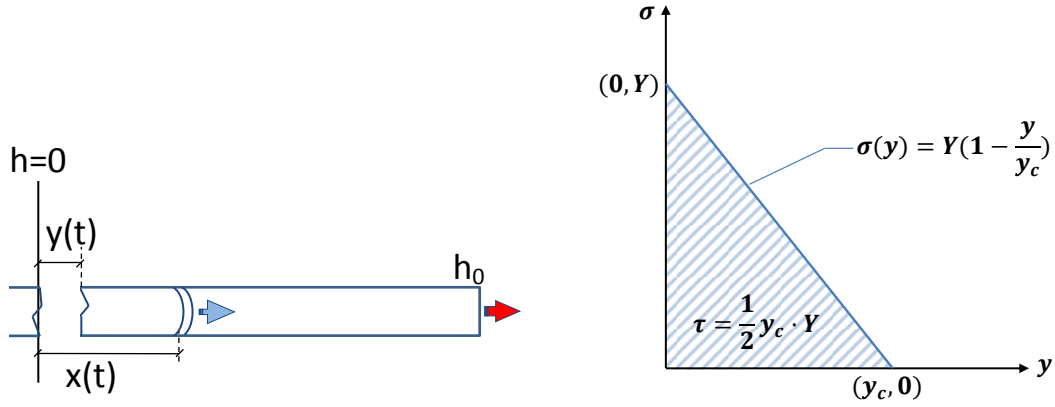


Figura 3.6: apertura del frente de fisura CTOD, distancia entre los labios de la fisura medida a  $45^\circ$  del punto de propagación

Para estimar la velocidad de propagación de las ondas de descarga procedemos al igual que en el caso de la teoría estadística (ver apartado 3.1.1.2.). Planteando un balance de momento lineal llegábamos a la siguiente expresión para la distancia  $x$  recorrida por la onda de descarga:

$$\rho \dot{\epsilon} x \frac{dx}{dt} = \sigma(h_0) - \sigma(0) \quad (3.33)$$

En la teoría estadística, consideramos que en el instante de la fractura la tensión caía repentinamente a cero y por tanto  $\sigma(0) = 0$  en  $t = 0$ , en esta ocasión, consideraremos que a medida que el CTOD, al que denominaremos  $y$  de ahora en adelante, avanza desde cero hasta su valor crítico  $y_c$ , la tensión cae linealmente desde el límite elástico  $Y$  a cero (ver figura 3.7). Por tanto, tenemos que la energía disipada durante la fractura es  $\tau = Yy_c/2$  (área bajo la recta en la figura 3.7(b)). Asumir otra forma funcional para la reducción de la tensión que no sea lineal no altera significativamente el valor del número de fracturas(Grady, 2006).



(a) El CTOD crece desde 0 hasta  $y_c$  a la misma velocidad que se propaga la onda  
(b) La tensión se reduce desde  $Y$  a 0 a medida que  $y$  crece. El área bajo la curva es la energía

Figura 3.7: evolución de la tensión con el CTOD

A la vista del esquema anterior,  $\sigma(h_0) = Y$  mientras que  $\sigma(0) = \frac{-yY^2}{2\tau} + Y$ , por tanto:

$$\rho \dot{\epsilon} x \frac{dx}{dt} = \sigma(h_0) - \sigma(0) = \frac{Y^2}{2\tau} y \quad (3.34)$$

Además, el CTOD se desplaza a la misma velocidad que la onda de descarga, ya que toda la parte no cargada se comporta como un sólido rígido, por tanto:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{\epsilon} x \quad (3.35)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales 3.34 y 3.35 se obtiene:

$$x(t) = \frac{1}{12} \frac{Y^2}{\rho \tau} t^2 \quad \text{Desplazamiento de la onda de descarga para } 0 \leq y \leq y_c \quad (3.36)$$

$$y(t) = \frac{1}{36} \frac{\dot{\epsilon} Y^2}{\rho \tau} t^3 \quad \text{Espacio recorrido por el CTOD como función del tiempo} \quad (3.37)$$

Cuando  $y$  alcanza  $y_c$  la fractura se completa y la solución calculada por Mott  $x(t) = \sqrt{\frac{2Yt}{\rho \dot{\epsilon}}}$  vuelve a ser válida.

Haciendo  $y = y_c$  en la expresión 3.37 y empleando la expresión para la energía  $\tau = Y y_c / 2$ , se calcula el tiempo que tarda la fractura en completarse:

$$t_c = \left( \frac{72 \rho \tau^2}{Y^3 \dot{\epsilon}} \right)^{1/3} \quad (3.38)$$

La distancia que recorre la onda durante este tiempo es:

$$x_c = \left( \frac{3\tau}{\rho \dot{\epsilon}^2} \right)^{1/3} \quad (3.39)$$

En conclusión, el efecto de incluir la resistencia a la fractura del material supone provocar un retraso en la propagación de las ondas. La figura 3.8 muestra como durante el tiempo  $t_c$  que tarda en abrirse el CTOD, la velocidad de la onda calculada considerando la resistencia a la fractura es más lenta.

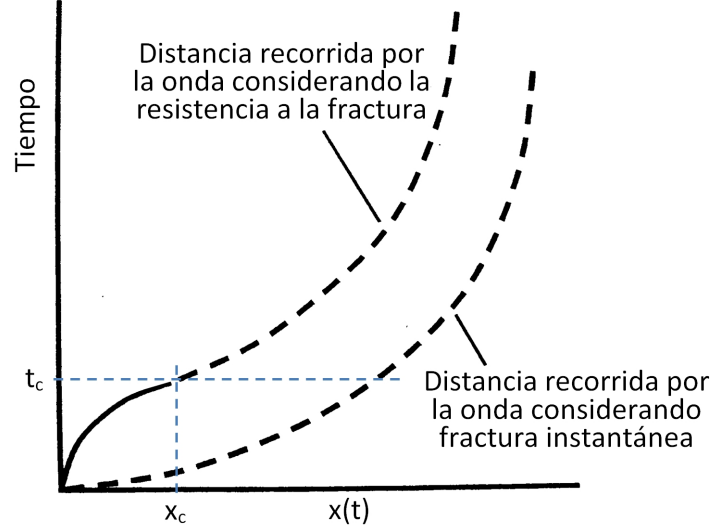


Figura 3.8: comparación entre la propagación de la onda de descarga con resistencia a fractura y con fractura instantánea (Grady, 2006)

### 3.1.2.2. Tamaño de los fragmentos y tenacidad de fragmentación

Si  $x_c$  es el espacio que recorre una onda mientras se produce la fractura, entonces,  $2x_c$  es el mínimo espacio entre fracturas separadas que permitiría que ambas se completasen sin interferencia entre las dos ondas. La teoría energética toma  $x_0 = 2x_c$  como la longitud nominal de fragmento:

$$x_0 = \left( \frac{24\tau}{\rho\dot{\epsilon}^2} \right)^{1/3} \quad (3.40)$$

La disipación energética durante el crecimiento de la fractura  $\tau$ , se supone una propiedad que sólo depende del material. Sin embargo, es la tenacidad a fractura  $K$  la propiedad más comúnmente empleada para caracterizar la fractura dúctil en metales, así, Grady propone definir una tenacidad a fragmentación  $K_f$  que amplíe este concepto al régimen dinámico. Esta nueva propiedad tendrá por tanto, las mismas dimensiones que la tenacidad a fractura ( $MPa\sqrt{m}$ ):

$$K_f = \sqrt{2E\tau} \quad (3.41)$$

donde  $E$  es el módulo elástico del material. Teniendo esto en cuenta, la expresión 3.40 se puede escribir de manera equivalente en función de esta nueva propiedad:

$$x_0 = \left( \frac{\sqrt{12}K_f}{\rho c\dot{\epsilon}} \right)^{2/3} \quad (3.42)$$

La teoría energética no aborda la cuestión de determinar las distribuciones de longitud de fragmentos, se limita a proporcionar la expresión 3.42 para el tamaño promedio de los mismos.

Invirtiendo 3.42 obtenemos, al igual que en la teoría de Mott, el número de fragmentos por unidad de longitud:

$$N = \left( \frac{\rho c \dot{\varepsilon}}{\sqrt{12} K_f} \right)^{2/3} \quad (3.43)$$

### 3.1.2.3. Unión de las teorías estadística y energética

Las dos teorías que acabamos de analizar llegan a expresiones completamente análogas para el número de fragmentos por unidad de longitud:

$$N = \beta_n \left( \frac{\rho \dot{\varepsilon}^2 n}{2\pi Y \sigma} \right)^{n/(2n+1)} \quad \text{Teoría estadística} \quad (3.44)$$

$$N = \left( \frac{\rho \dot{\varepsilon}^2}{24\tau} \right)^{1/3} \quad \text{Teoría energética} \quad (3.45)$$

donde, como hemos visto antes:

$$\beta_n = \left( \frac{2n}{2n+1} \right)^{1/(2n+1)} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n)} \right)^{2n/(2n+1)} \Gamma \left( \frac{2n}{2n+1} \right) \quad (3.46)$$

Ambas expresiones deberían proporcionar los mismos resultados. Parece lógico entonces, plantearnos bajo qué condiciones estas dos expresiones son efectivamente equivalentes. En primer lugar, si igualamos los exponentes tenemos:

$$\frac{1}{3} = \frac{n}{2n+1} \Rightarrow n = 1 \quad (3.47)$$

Si ahora igualamos ambas expresiones:

$$\left( \frac{\rho \dot{\varepsilon}^2}{24\tau} \right)^{1/3} = \beta_1^3 \left( \frac{\rho \dot{\varepsilon}^2}{2\pi Y \sigma} \right)^{1/3} \quad (3.48)$$

donde  $\beta_n$  evaluado en  $n = 1$  es  $\beta_1 = 1,0914$ . De la expresión anterior se puede despejar el segundo parámetro de Weibull:

$$\sigma = \beta_1^3 \frac{12}{\pi} \frac{\tau}{Y} \approx 5 \frac{\tau}{Y} \quad (3.49)$$

Así, los requisitos de la teoría energética restringen los valores de los parámetros de Weibull en la teoría estadística de Mott.

Restringir de esta forma los parámetros  $n$  y  $\sigma$  conlleva implicaciones importantes. La teoría estadística se basa en dos formas funcionales que describen el comportamiento del material: la función de riesgo, que para estos desarrollos se ha elegido en su forma potencial, y la función que determina el espacio recorrido por las ondas de relajación.

$$h(\varepsilon) = \frac{n}{\sigma} \left( \frac{\varepsilon}{\sigma} \right)^{n-1} \quad x(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2Y\varepsilon}{\rho \dot{\varepsilon}^2}} \quad (3.50)$$



Sustituyendo  $n = 1$  y  $\sigma \approx 5\frac{\tau}{Y}$  en la función de activación, ésta queda reducida a una constante  $h(\varepsilon) = \sigma^{-1} = \frac{Y}{5\tau}$ . Esto supone un cambio total en la interpretación de la teoría estadística, ya que, si  $h(\varepsilon)$  es una constante, la tasa de activación de fracturas es uniforme e independiente de la deformación a la que se produzca la fractura.

La figura 3.9 muestra la función de riesgo potencial y ésta misma restringida por la teoría energética. En el eje de abscisas se muestra la evolución de la deformación a medida que el anillo se expande.

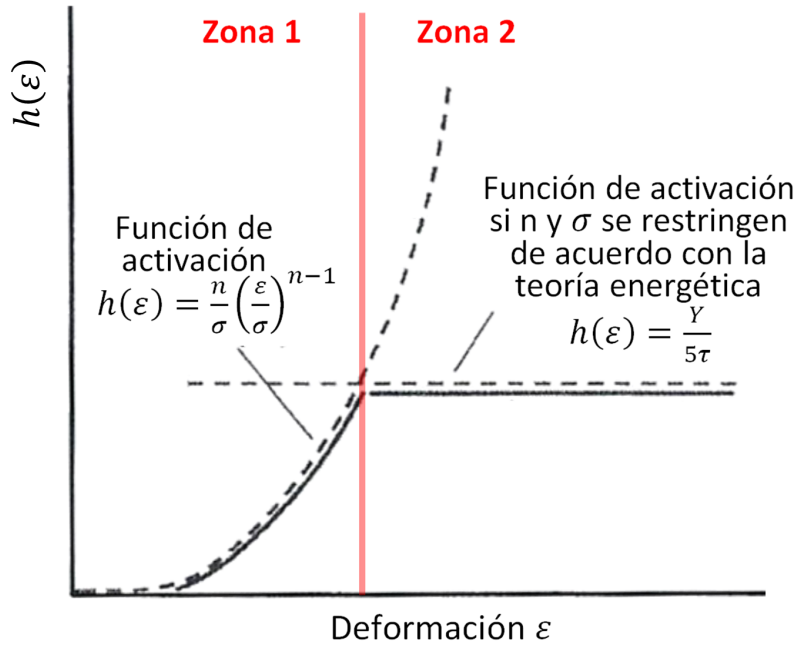
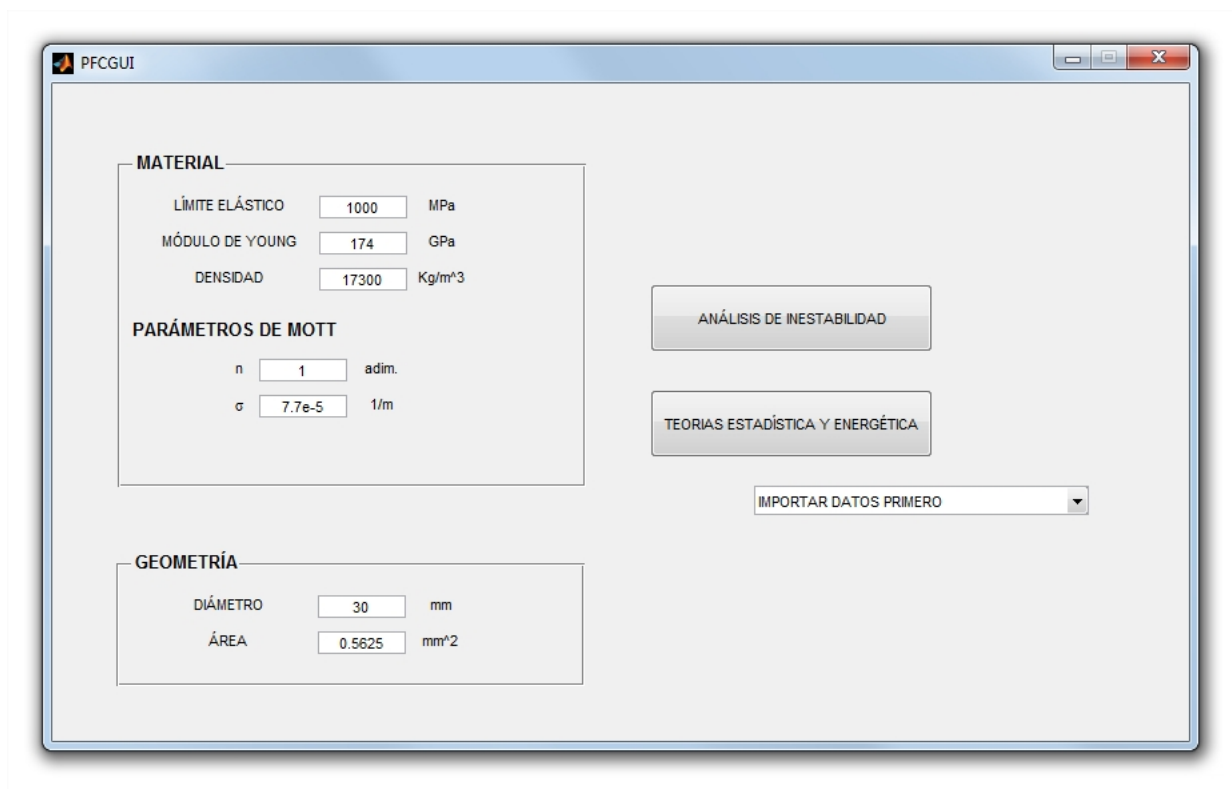


Figura 3.9: función de riesgo en la teoría estadística con y sin restricción de los parámetros de Weibull

Estas observaciones sugieren una reinterpretación del significado físico de la función de riesgo: en la zona 1 de la figura anterior, instantes iniciales de la expansión, la función de riesgo potencial predice adecuadamente la tasa de formación de fracturas. Sin embargo, en la zona a la derecha del punto de corte, el fenómeno está dominado por la energía disipada en el proceso de fractura lo que conlleva la estabilización de la tasa de activación en un nivel constante. En esta zona, la función potencial sin restringir puede entenderse como la tasa de activación de estricciones; de forma que, la diferencia entre las dos funciones serán aquellas estricciones que se activan pero no disponen de la energía suficiente para progresar hasta convertirse en fractura. Especificar que en los apartados siguientes, dejando al margen la discusión desarrollada en esta sección, se va a emplear la función de activación tal como se define en la teoría estadística.

## 3.2. Resultados

Los modelos anteriormente descritos han sido implementados en un programa a través de MATLAB R2012b. A continuación se presenta una revisión del funcionamiento del software y la validación de sus resultados comparándolos con los obtenidos por Grady (2006). La figura 3.10 muestra la pantalla inicial del programa, en ella se insertan las propiedades del material, los parámetros experimentales y la geometría.



*Figura 3.10: pantalla inicial*

Como comentábamos en la introducción, emplearemos un anillo de 30 mm de diámetro interior y una sección cuadrada de 0.75 mm de lado. El material elegido es U6N con 1 GPa de límite elástico, 174 GPa de módulo de Young y una densidad de  $17300 \text{ Kg/m}^3$ . De forma que, los resultados obtenidos serán comparables a los experimentos de Grady (2006) y Grady and Olsen (2003).

Ambas teorías requieren de algún parámetro experimental para su correcto funcionamiento. La teoría estadística necesita los valores  $n$  y  $\sigma$  (ecuación 3.18) que se calculan a partir de los ensayos de tracción uniaxial como se indica en el apartado 3.1.1.1., sus valores para el U6N son  $n = 1$  y  $\sigma = 7,7 \cdot 10^{-5}$ . Por su parte, la teoría energética necesita de la tenacidad a fragmentación  $K_f$  (ecuación 3.41) que se estimará automáticamente a partir de los datos experimentales como se indica a continuación:

Primero, se carga el archivo de Excel con los datos experimentales de Grady (2006). La figura 3.11 muestra dicho archivo: en el cuadro izquierdo se encuentran los datos de velocidad

y número de fragmentos para distintos ensayos, mientras que en el derecho encontramos la distribución de las masas de los fragmentos para uno de los ensayos en concreto.

Número de test	Velocidad de expansión (m/s)	Deformación de fallo %	Tensión de fallo(Gpa)	Número de fragmentos	Distribución de masas (g) Test 52
22	87,9		13	13	0,092
42	82,3	0,88	11	11	0,088
44	45,1	0,77	8	8	0,078
30	73,1	0,9	14	14	0,077
14	144,9	0,89	20	20	0,074
24	177,9	1,1	18	18	0,074
20	192,1	1,18	21	21	0,071
16	126,5		19	19	0,071
26	176,2	1,05	18	18	0,07
52	162,2	1,15	18	18	0,069
54	160,4	0,89	20	20	0,068
10	191,7	0,95	20	20	0,058
56	250,8	0,97	23	23	0,056
60	239,6	1,15	1,16	28	0,044
28	165,7	21	2,65	45	0,039
62	171,5	31,7	1,08	18	0,035
66	159,4	31,1	1,03	20	0,033
68	235,5	31,9	1,01	23	0,025
70	259,4	20,7	1,2	27	

Figura 3.11: resumen de los resultados experimentales de Grady (2006)

Tras cargar los datos, el programa genera automáticamente las siguientes gráficas:

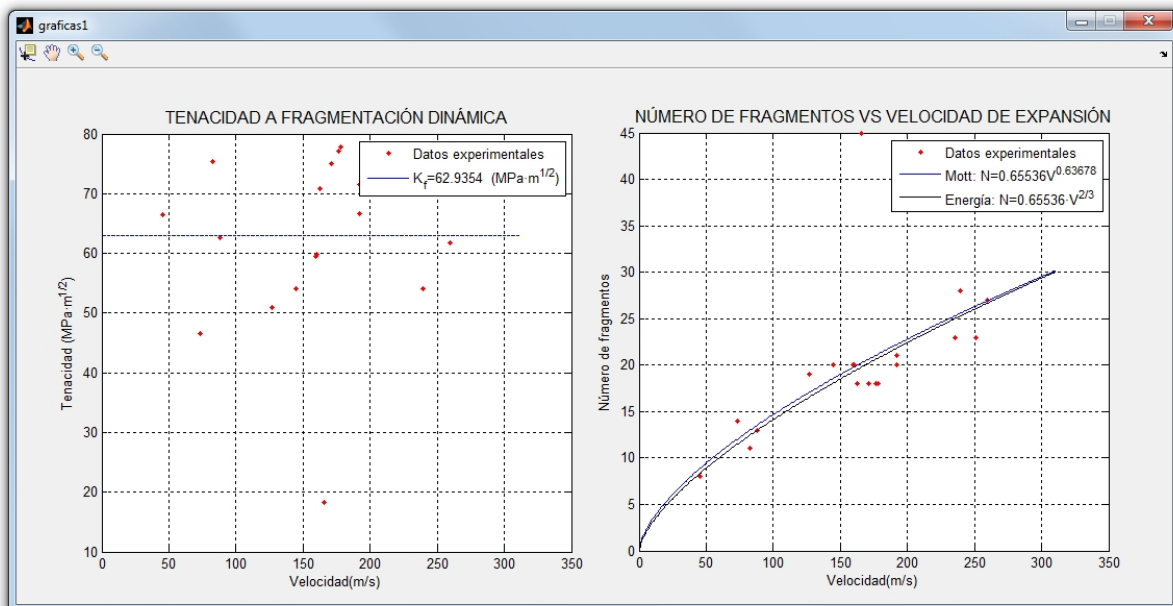


Figura 3.12: Cálculo de la tenacidad a fragmentación a partir de los datos experimentales. Número de fragmentos frente a velocidad: teorías estadística, energética y datos experimentales

- La gráfica izquierda de la figura 3.12 representa en rojo los valores de  $K_f$  para cada experimento, estos valores se determinan despejando de la ecuación 3.41. Seguidamente el programa calcula un valor promedio de  $K_f$  que será empleado en el resto de cálculos de la teoría energética.
- La gráfica derecha representa el número de fragmentos frente a velocidad de expansión. El cálculo se realiza tanto por la teoría estadística como por la energética, además se incluyen los datos experimentales de Grady (2006) para contrastar que el funcionamiento sea adecuado.

Finalmente, el programa también nos permite representar las distribuciones de masas y longitudes para aquellos experimentos en los que hayamos registrado los valores. La figura 3.13 muestra las distribuciones analíticas de Grady tanto de probabilidad acumulada como de densidad de probabilidad superpuestas a los datos experimentales del ensayo 52.

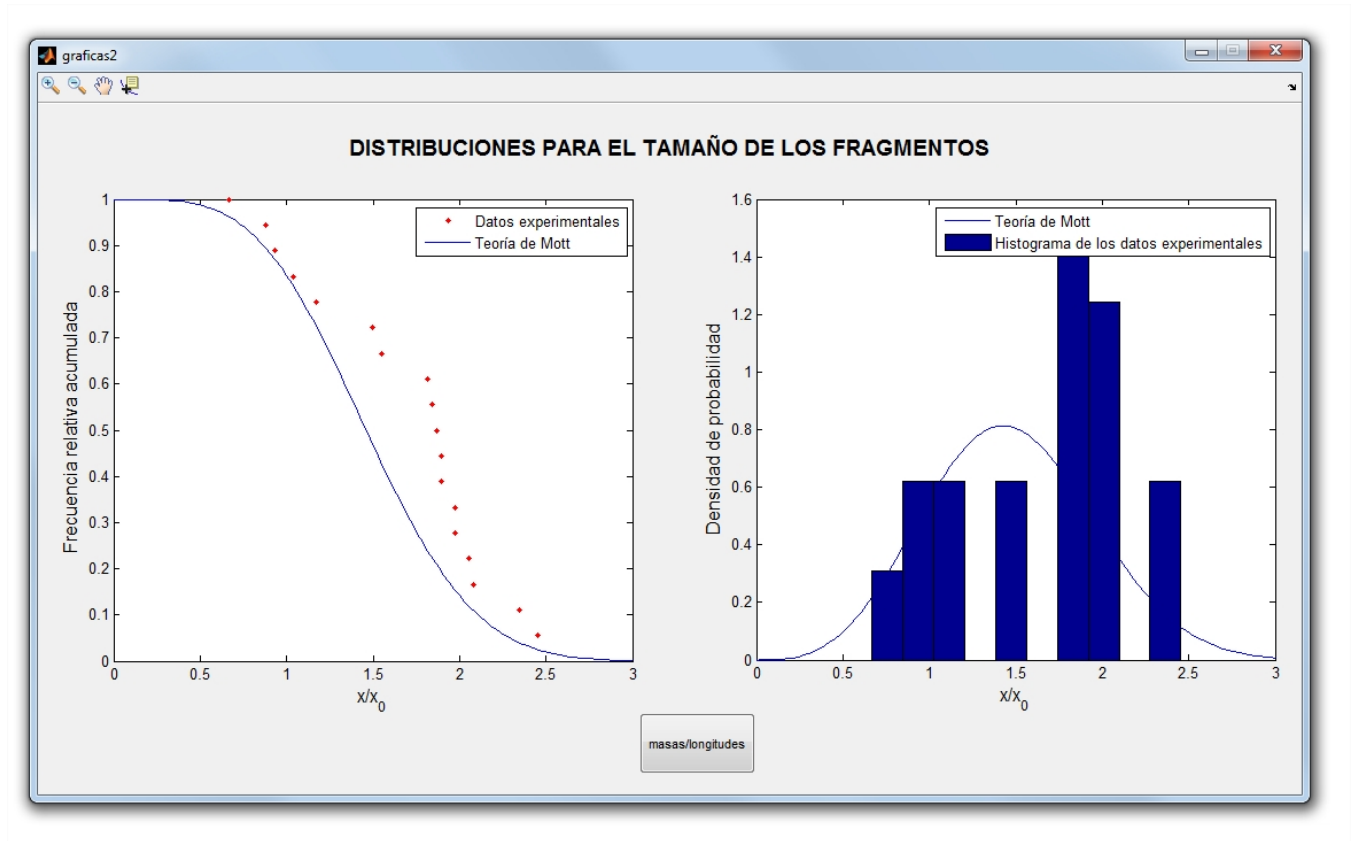


Figura 3.13: distribuciones estadísticas para el tamaño de los fragmentos, ensayo a 162,2 m/s. Comparativa entre los datos experimentales y la teoría de N.F.Mott.

En las gráficas anteriores  $x/x_0$  es la longitud adimensional de los fragmentos, siendo  $x_0 = (2\sigma Y/2\rho\dot{\epsilon}^2)^{1/3}$ . El cálculo se ha realizado considerando, como hemos expuesto en la sección 3.1.1.2., que las ondas de descarga se propagan una vez el material ha plastificado.

## Capítulo 4

# Fragmentación dinámica: análisis de perturbaciones

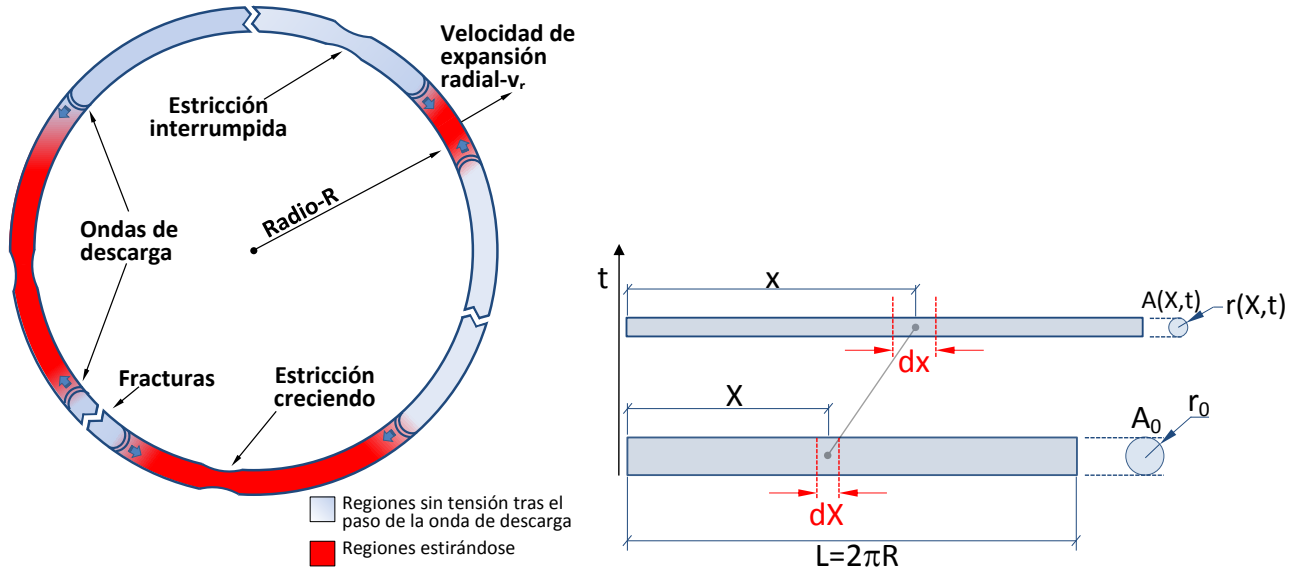
El siguiente modelo a analizar para el problema de fragmentación dinámica es el análisis de estabilidad (Zhou et al., 2006). A diferencia de las teorías anteriores, el análisis de estabilidad no se centra en el momento en el que se producen las fracturas, sino que estudia una etapa anterior en la que los defectos intrínsecos al sólido (geométricos, materiales, etc.) dan lugar a perturbaciones en los campos tensional y deformacional. Estas perturbaciones conllevan la localización de la tensión y la aparición de múltiples cuellos de estrangulación.

Este capítulo presenta el modelo de perturbación basado en la formulación de Zhou et al. (2006). El problema inicial y de contorno para la expansión unidimensional del anillo será resuelto empleando un método de perturbación lineal. Al final de este capítulo seremos capaces de determinar de forma teórica la longitud de onda dominante, es decir, la distancia promedio entre estrangulaciones.

### 4.1. Modelización

Este modelo parte de un esquema muy parecido al que hemos empleado en la teoría estadística para estimar la velocidad de las ondas de descarga. Supongamos que el anillo, con radio  $R$  y velocidad radial  $v_r$ , se puede aproximar a una barra de longitud  $L = 2\pi R$  cuya sección en el instante inicial es  $A_0 = \pi r_0^2$ . A medida que esta barra se estira con una velocidad  $v$ , que consideraremos constante, la sección transversal se reducirá; tal y como se muestra en la figura 4.1(b). Así, para  $t=0$  la tensión y la deformación en la barra son nulas y la condición inicial es una velocidad de deformación  $\dot{\epsilon}_0 = \frac{v_r}{R}$ .

Sobre esta barra establecemos dos sistemas de coordenadas: uno Lagrangiano  $X$  ( $0 \leq X \leq L$ ) y otro Euleriano  $x$ ; tal que, para un instante de tiempo  $t$ , la posición Euleriana de una sección  $x$ , su velocidad axial  $v$ , la tensión  $\sigma$ , la deformación  $\epsilon$ , el radio  $r$  y el área  $A$ , serán funciones de  $X$  y  $t$ .



(a) Fragmentación del anillo sometido a presión interna

(b) Barra a tracción

Figura 4.1: modelización de la expansión del anillo como una barra que se estira con una velocidad constante (Zhou et al., 2006)

#### 4.1.1. Formulación

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del sistema son las siguientes:

- Balance de cantidad de movimiento en la dirección axial. La cantidad de movimiento para un elemento diferencial de barra en la configuración inicial es:

$$p = m \cdot v = \rho_0 A_0 dX \cdot v \quad (4.1)$$

Planteando el balance de cantidad de movimiento tenemos:

$$dF = \frac{dp}{dt} = \rho_0 A_0 dX \cdot \frac{dv}{dt} \quad (4.2)$$

Y como  $F = \sigma \cdot A$  nos queda

$$\rho_0 A_0 \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_X = \left[ \frac{\partial (A\sigma)}{\partial X} \right] = A \left( \frac{\partial \sigma}{\partial X} \right)_t + \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial X} \right)_t \quad (4.3)$$

- Definición de deformación de Hencky:

$$\varepsilon = \ln \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial X} \right)_t \right], \text{ lo que implica } \left( \frac{\partial x}{\partial X} \right)_t = e^\varepsilon \quad (4.4)$$

- Ecuación de continuidad: se obtiene derivando la expresión anterior respecto del tiempo

$$\left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)_t = e^\varepsilon \dot{\varepsilon} \quad (4.5)$$

- La condición de incompresibilidad,  $A_0 \cdot dX = A \cdot dx$ , permite expresar la deformación como:

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) \text{ y, por tanto, la velocidad de deformación como } \dot{\varepsilon} = -\frac{\dot{A}}{A} \quad (4.6)$$

- Relación constitutiva del material: aunque la relación constitutiva que vamos a emplear es, al igual que en los modelos anteriores, la de un material elástico perfectamente plástico. Interesa en este punto, y a modo ilustrativo, incluir un endurecimiento por velocidad de deformación. El interés reside en que, introducir la viscosidad en el modelo nos ayudará a entender mejor el comportamiento del mismo como se verá más adelante.

Así, tomaremos un modelo de material perfectamente plástico  $\partial\sigma_y/\partial\varepsilon = 0$ ; y con endurecimiento potencial por velocidad de deformación  $\sigma_y = \sigma_0 \dot{\varepsilon}^m$  caracterizado por el parámetro  $m$ .

$$\sigma_y = \sigma_0 \dot{\varepsilon}^m \quad (4.7)$$

Recalcar una vez más que, al realizar cálculos comparativos entre los distintos modelos, supondremos un material elástico perfectamente plástico, lo que equivale a hacer cero el parámetro  $m$ .

- Corrección de Bridgman: en la zona de la estricción el flujo tensional pierde su carácter unidimensional. Para tener en cuenta este fenómeno se introduce la corrección de Bridgman.

$$\sigma = (1 + \theta^{-1}) \ln(1 + \theta) \sigma_y, \text{ donde } \theta = \frac{1}{2} r \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \right) = \frac{2A(\partial^2 A/\partial x^2) - (\partial A/\partial x)^2}{8\pi A} \quad (4.8)$$

Aunque la solución de Bridgman fue desarrollada únicamente para la sección central de la estricción, asumiremos aquí que es válida también para el resto de secciones.

- Finalmente tenemos las siguientes ecuaciones auxiliares:

$$r = \sqrt{A/\pi}, \quad \dot{\varepsilon}^p = \partial\varepsilon^p/\partial t \quad (4.9)$$

La formulación se complementa con las condiciones iniciales y de contorno para una barra bajo velocidad constante en el tiempo:

$$v(X, 0) = \dot{\varepsilon}_0 X, \quad v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = \dot{\varepsilon}_0 L \quad (4.10)$$

### 4.1.2. Solución homogénea

Si la velocidad impuesta en el extremo de la barra es constante en el tiempo, la velocidad en cualquier punto de la misma únicamente dependerá de la coordenada generalizada  $X$ , nunca del tiempo  $v = v(X)$ . Teniendo esto en cuenta, la velocidad queda definida sin más que aplicar la condición inicial:  $v(X, 0) = \dot{\varepsilon}_0 X$

El cálculo de la deformación se realiza diferenciando las expresiones para la posición Euliana y la velocidad:

$$\left. \begin{aligned} x(X, t) = X + vt &\longrightarrow \partial x = \partial X + \partial vt \\ v(X) = \dot{\varepsilon}_0 X &\longrightarrow \partial v = \dot{\varepsilon}_0 \partial X \end{aligned} \right\} \frac{\partial x}{\partial X} = (1 + \dot{\varepsilon}_0 t) \quad (4.11)$$

De la ecuación 4.4 tenemos que  $\varepsilon = \ln \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial X} \right)_t \right]$ , y por tanto  $\varepsilon = \ln(1 + \dot{\varepsilon}_0 t)$

Conocida la deformación, la velocidad de deformación se obtiene derivando respecto del tiempo  $\dot{\varepsilon}(X, t) = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{1 + \dot{\varepsilon}_0 t}$

Obtenemos el área de la ecuación 4.6:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{\dot{\varepsilon}_0}{1 + \dot{\varepsilon}_0 t} dt, \text{ integrando se tiene } \ln \frac{A}{A_0} = -\ln(1 + \dot{\varepsilon}_0 t) \quad (4.12)$$

$$A(X, t) = \frac{A_0}{1 + \dot{\varepsilon}_0 t} \quad (4.13)$$

La determinación del radio es inmediata:

$$r = \sqrt{A/\pi} = \sqrt{\frac{A_0/\pi}{1 + \dot{\varepsilon}_0 t}} = \frac{r_0}{\sqrt{1 + \dot{\varepsilon}_0 t}} \quad (4.14)$$

Finalmente tenemos que el parámetro de Bridgman es nulo, ya que en la solución homogénea no se produce estricción alguna y por tanto, la tensión queda definida por la relación constitutiva elegida.

A continuación se muestra la solución homogénea para todas las variables del sistema:

$$\begin{aligned} v(X) &= \dot{\varepsilon}_0 X & \varepsilon(t) &= \ln(1 + \dot{\varepsilon}_0 t) \\ \dot{\varepsilon}(t) &= \frac{\dot{\varepsilon}_0}{1 + \dot{\varepsilon}_0 t} & A(t) &= \frac{A_0}{1 + \dot{\varepsilon}_0 t} & r(t) &= \frac{r_0}{\sqrt{1 + \dot{\varepsilon}_0 t}} \\ \theta = 0 &\Rightarrow \sigma(t) = \sigma_y(t) = \sigma_0 \dot{\varepsilon}(t)^m \end{aligned}$$



### 4.1.3. Análisis lineal de perturbación

A la vista de las soluciones anteriores podemos comprobar como, a medida que avanza el tiempo, la deformación se incrementa indefinidamente. Este resultado carece de significado físico, y se debe a que el conjunto de ecuaciones de gobierno no contempla las heterogeneidades propias del sólido, responsables de la perturbación de los campos de tensión y deformación.

Para tratar esta situación se emplea la técnica de perturbación lineal. Esta técnica consiste en considerar la solución formada por: la parte homogénea calculada anteriormente, más una perturbación infinitesimal de cada una de las variables. Esta perturbación se aplica a partir de un cierto instante de tiempo  $t_1$  y es de la forma  $\delta e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} = \{\delta v, \delta \varepsilon, \delta \dot{\varepsilon}, \delta A, \delta r, \delta \theta, \delta \sigma\}^T e^{i\xi X + \eta(t-t_1)}$ .

Asumimos entonces que para  $t > t_1$  la solución del sistema de ecuaciones 4.1-4.10 se puede expresar como la parte homogénea evaluada en  $t_1$ , más la perturbación.

$$\begin{pmatrix} v(X, t) \\ \varepsilon(X, t) \\ \dot{\varepsilon}(X, t) \\ A(X, t) \\ r(X, t) \\ \theta(X, t) \\ \sigma(X, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(X) \\ \varepsilon_1(t_1) \\ \dot{\varepsilon}_1(t_1) \\ A(t_1) \\ r(t_1) \\ \theta(t_1) \\ \sigma(t_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta v \\ \delta \varepsilon \\ \delta \dot{\varepsilon} \\ \delta A \\ \delta r \\ \delta \theta \\ \delta \sigma \end{pmatrix} e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} \quad (4.15)$$

Si analizamos el término exponencial en la perturbación  $e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} = (\cos \xi X + i \sin \xi X) e^{\eta(t-t_1)}$  vemos que se trata de una onda de frecuencia  $\xi$  modulada por la exponencial de  $\eta(t-t_1)$ . Por tanto,  $\eta$  representa la tasa de crecimiento de la perturbación. Para simplificar la notación, a partir de ahora denotaremos con el subíndice 1 a cualquier variable evaluada en el instante  $t_1$ ; por ejemplo:  $\sigma(t_1) = \sigma_1$

El proceso a seguir en la técnica de perturbación lineal consta de los siguientes pasos: lo primero será linealizar el sistema de ecuaciones 4.1-4.10 en torno a la solución homogénea, esto permitirá obtener un sistema de ecuaciones algebraicas para los diferenciales de las distintas variables  $\{\delta v, \delta \varepsilon, \delta \dot{\varepsilon}, \delta A, \delta r, \delta \theta, \delta \sigma\}$ . En segundo lugar expresaremos este sistema de forma adimensional e impondremos que el mismo sea compatible indeterminado igualando el determinante de la matriz de coeficientes a cero. Esta condición de compatibilidad nos permitirá llegar a una relación entre la tasa de crecimiento de las perturbaciones y la frecuencia de las mismas.

#### 4.1.3.1. Linealización de las ecuaciones de gobierno en torno a la solución homogénea

- Balance de cantidad de movimiento. Para ésta ecuación introducimos las variables perturbadas y simplificamos los términos de segundo orden:

$$\rho_0 A_0 \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_X = A \left( \frac{\partial \sigma}{\partial X} \right)_t + \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial X} \right)_t$$

$$\rho_0 A_0 \delta v e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} \eta = \left( A_1 + \delta A e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} \right) \delta \sigma e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} i\xi + \left( \sigma_1 + \delta \sigma e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} \right) \delta A e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} i\xi$$

$$\rho_0 A_0 \delta v \eta = A_1 \delta \sigma i\xi + \delta A \delta \sigma i\xi e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} + \sigma_1 \delta A i\xi + \delta \sigma \delta A i\xi e^{i\xi X + \eta(t-t_1)}$$

$$\boxed{\rho_0 A_0 \delta v \eta = i\xi [A_1 \delta \sigma + \sigma_1 \delta A]}$$
 (4.16)

- Ecuación de continuidad. En éste caso y los siguientes linealizamos la ecuación en torno a la solución homogénea empleando el desarrollo en serie de Taylor:

$$\left( \frac{\partial v}{\partial X} \right)_t = e^\varepsilon \dot{\varepsilon}$$

Si llamamos  $f = e^\varepsilon \dot{\varepsilon}$ , la ecuación linealizada queda:

$$\frac{\partial v}{\partial X} \approx \frac{\partial v}{\partial X} \Big|_{t_1} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \Big|_{t_1} (\varepsilon - \varepsilon_1) + \frac{\partial f}{\partial \dot{\varepsilon}} \Big|_{t_1} (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial X} + \delta v e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} i\xi - \frac{\partial v}{\partial X} \approx e^{\varepsilon_1} \dot{\varepsilon}_1 (\varepsilon_1 + \delta \varepsilon_1 e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} - \varepsilon_1) + e^{\varepsilon_1} (\dot{\varepsilon}_1 + \delta \dot{\varepsilon} e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} - \dot{\varepsilon}_1)$$

$$\boxed{\delta v = -i\xi^{-1} e^{\varepsilon_1} (\delta \dot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}_1 \delta \varepsilon)}$$
 (4.17)

- Condición de incompresibilidad  $\varepsilon = \ln \left( \frac{A_0}{A} \right)$ ,  $f = \ln (A_0/A)$

$$\varepsilon(X, t) \approx \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial A} \Big|_{t_1} (A(X, t) - A_1)$$

$$\varepsilon_1 + \delta \varepsilon e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} - \varepsilon_1 = \frac{-1}{A_1} (A_1 + \delta A e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} - A_1)$$

$$\boxed{\delta A = -A_1 \delta \varepsilon}$$
 (4.18)

- Radio  $r = \sqrt{A/\pi}$ ,  $f = \sqrt{A/\pi}$

$$r \approx r_1 + \frac{\partial f}{\partial A} \Big|_{t_1} (A - A_1), \quad \boxed{\delta r = \frac{1}{2\sqrt{A_1\pi}} \delta A}$$
 (4.19)

- Ley de flujo  $\sigma = (1 + \theta^{-1}) \ln(1 + \theta) \sigma_y$ ; siendo  $\sigma_y = \sigma_0 \dot{\varepsilon}^m$

$$\sigma \approx \sigma_1 + \frac{\partial f}{\partial \theta} \Big|_{t_1} (\theta - \theta_1) + \frac{\partial f}{\partial \dot{\varepsilon}} \Big|_{t_1} (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1)$$

$$\delta \sigma = \sigma_y \underbrace{\left[ -\theta_1^{-2} \ln(1 + \theta_1) + (1 + \theta_1^{-1}) \frac{1}{1 + \theta_1} \right]}_{\approx \frac{1}{2}} \delta \theta + \underbrace{(1 + \theta_1^{-1}) \ln(1 + \theta_1)}_{\approx 1} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \dot{\varepsilon}} \delta \dot{\varepsilon}$$

Como hemos visto anteriormente, en la solución homogénea  $\theta_1 = 0$  ya que no hay estricción alguna. Al sustituir este resultado en la expresión anterior nos encontramos con las dos indeterminaciones que han sido resaltadas:

- La primera de ellas  $-\theta_1^{-2} \ln(1 + \theta_1) + (1 + \theta_1^{-1}) \frac{1}{1 + \theta_1} \approx \frac{1}{2}$
- En cuanto a la segunda  $(1 + \theta_1^{-1}) \ln(1 + \theta_1)$  queda resuelta empleando las siguientes aproximaciones e infinitésimos equivalentes:

$$1 + \theta_1^{-1} \approx \frac{1}{\theta}, \quad \ln(1 + \theta_1) \approx \theta, \quad \text{nos queda } (1 + \theta_1^{-1}) \ln(1 + \theta_1) \approx 1$$

Finalmente tenemos que  $\frac{\partial \sigma_y}{\partial \dot{\varepsilon}} = \sigma_0 m \dot{\varepsilon}_1^{m-1} = m \frac{\sigma_1}{\dot{\varepsilon}_1}$ ; y por tanto:

$$\delta \sigma = m \frac{\sigma_1}{\dot{\varepsilon}_1} \delta \dot{\varepsilon} + \frac{1}{2} \sigma_1 \delta \theta \quad (4.20)$$

- Corrección de Bridgman  $\theta = \frac{1}{2} r \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \right) = \frac{2A(\partial^2 A / \partial x^2) - (\partial A / \partial x)^2}{8\pi A}$ . En este caso, al igual que en el balance de cantidad de movimiento, resulta más directo sustituir la solución perturbada en la ecuación y despreciar los términos de segundo orden.

Sustituyendo en la ecuación  $\theta = \frac{1}{2} r \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \right)$ ; siendo  $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = -\delta r \xi^2 e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} \underbrace{(1 + \dot{\varepsilon}_0 t)^{-2}}_{e^{-2\varepsilon_1}}$

nos queda:

$$\theta_1 + \delta \theta e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} = \frac{1}{2} \left( r_1 + \delta r e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} \right) \left( -\xi^2 \delta r e^{-2\varepsilon_1} e^{i\xi X + \eta(t-t_1)} \right)$$

$$\delta \theta = -\frac{1}{2} r_1 \delta r \xi^2 e^{-2\varepsilon_1}; \quad \delta \theta = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1}{\pi}} \frac{\delta A}{2\sqrt{\pi A_1}} \xi^2 e^{-2\varepsilon_1}$$

$$\delta \theta = \frac{-\xi^2}{4\pi} e^{-2\varepsilon_1} \delta A \quad (4.21)$$

#### 4.1.3.2. Adimensionalización de las ecuaciones

Llegados a este punto tenemos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas para los diferenciales de las distintas variables:

$$\begin{aligned} \rho_0 A_0 \delta v \eta &= i\xi [A_1 \delta \sigma + \sigma_1 \delta A] & \delta r &= \frac{1}{2\sqrt{A_1 \pi}} \delta A \\ \delta v &= -i\xi^{-1} e^{\varepsilon_1} (\delta \dot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}_1 \delta \varepsilon) & \delta \sigma &= m \frac{\sigma_1}{\dot{\varepsilon}_1} \delta \dot{\varepsilon} + \frac{1}{2} \sigma_1 \delta \theta \\ \delta A &= -A_1 \delta \varepsilon & \delta \theta &= \frac{-\xi^2}{4\pi} e^{-2\varepsilon_1} \delta A \\ \delta \dot{\varepsilon} &= \eta \delta \varepsilon \end{aligned}$$

El siguiente paso será adimensionalizar el sistema de ecuaciones, para ello introducimos las siguientes variables adimensionales:  $\bar{\eta} = \eta/\dot{\varepsilon}_1$ ;  $\bar{\xi} = r_0\xi$ ;  $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_1$ ;  $\bar{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_1$ ;  $\bar{A} = A/A_0 = e^{-\varepsilon}$ ;  $\bar{r} = r/r_0$ ; y finalmente  $\bar{v} = v/v_a$  donde  $v_a = r_0 \dot{\varepsilon}_1$

La ecuación en forma adimensional para el balance de cantidad de movimiento queda:

$$\frac{1}{\bar{L}^2} \delta \bar{v} \bar{\eta} = i \bar{\xi} [e^{-\varepsilon_1} \delta \bar{\sigma} + \bar{\sigma}_1 \delta \bar{A}] \quad (4.22)$$

donde  $\bar{L} = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\rho_0 \dot{\varepsilon}_1^2 r_0^2}}$ . El término  $1/\bar{L}^2$  acompaña a la aceleración en la ecuación anterior y representa por tanto la inercia del sistema. Este parámetro  $\bar{L}$  tendrá un papel fundamental en el comportamiento del modelo como analizaremos más adelante. El resto de ecuaciones del modelo en forma adimensional son:

$$\begin{aligned} \delta \bar{v} &= -i \bar{\xi}^{-1} e^{\varepsilon_1} (\delta \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}_1 \delta \varepsilon) & \delta \bar{\sigma} &= m \cdot \bar{\varepsilon}_1^{m-1} \delta \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_1^m \delta \theta \\ \delta \bar{A} &= -e^{-\varepsilon_1} \delta \varepsilon & \delta \theta &= -\frac{\bar{\xi}^2}{4} e^{-2\varepsilon_1} \delta \bar{A} \\ \delta \bar{r} &= \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}\varepsilon_1} \delta \bar{A} & \delta \bar{\varepsilon} &= \bar{\eta} \delta \varepsilon \end{aligned}$$

#### 4.1.3.3. Planteamiento del sistema algebraico

El sistema anterior presentado en forma matricial queda como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \bar{\xi}^{-1} e^{\varepsilon_1} \bar{\varepsilon}_1 & i \bar{\xi}^{-1} e^{\varepsilon_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\eta} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\varepsilon_1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} e^{\varepsilon_1/2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m \cdot \bar{\varepsilon}_1^{m-1} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_1^m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\xi}^2}{4} e^{-2\varepsilon_1} & 0 & 1 & 0 \\ 1/\bar{L}^2 & 0 & 0 & -i \bar{\xi} \bar{\varepsilon}_1^m & 0 & 0 & -i \bar{\xi} e^{-\varepsilon_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta v \\ \delta \varepsilon \\ \delta \dot{\varepsilon} \\ \delta A \\ \delta r \\ \delta \theta \\ \delta \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Este sistema tendrá soluciones distintas de la trivial si (y solo si) el determinante de la matriz de coeficientes es nulo.

Desarrollando el determinante y simplificando llegamos a:

$$\bar{\eta}^2 + \left(1 + m \bar{L}^2 \bar{\xi}^2 e^{-2\varepsilon_1}\right) \bar{\eta} - \bar{L}^2 \bar{\xi}^2 e^{-2\varepsilon_1} \left(1 - \bar{\xi}^2 e^{-3\varepsilon_1}/8\right) = 0 \quad (4.24)$$

Para que la tasa de crecimiento de la perturbación  $\bar{\eta}$  sea positiva, debe cumplirse que:

$$-\left(1 + m\bar{L}^2\bar{\xi}^2 e^{-2\varepsilon_1}\right) + \sqrt{\left(1 + m\bar{L}^2\bar{\xi}^2 e^{-2\varepsilon_1}\right)^2 + 4\bar{L}^2\bar{\xi}^2 e^{-2\varepsilon_1} \left(1 - \bar{\xi}^2 e^{-3\varepsilon_1}/8\right)} > 0$$

Elevando todo al cuadrado tenemos:

$$-\left(1 + m\bar{L}^2\bar{\xi}^2 e^{-2\varepsilon_1}\right)^2 + \left(1 + m\bar{L}^2\bar{\xi}^2 e^{-2\varepsilon_1}\right)^2 + 4\bar{L}^2\bar{\xi}^2 e^{-2\varepsilon_1} \left(1 - \bar{\xi}^2 e^{-3\varepsilon_1}/8\right) > 0$$

$$\boxed{\bar{\xi} < 2\sqrt{2} e^{1,5\varepsilon_1}} \quad (4.25)$$

La expresión anterior es condición necesaria para que  $\bar{\eta}$  sea positiva. Expresada en forma dimensional resulta  $\xi < 2\sqrt{2} e^{1,5\varepsilon_1}/r_0$ .

Asumiendo que se cumple la condición (4.25), la solución de (4.24) es:

$$\boxed{\bar{\eta}^+ = \frac{1}{2} \left[ -\left(1 + m\bar{L}^2\bar{\xi}^2 e^{-2\varepsilon_1}\right) + \sqrt{\left(1 + m\bar{L}^2\bar{\xi}^2 e^{-2\varepsilon_1}\right)^2 + 4\bar{L}^2\bar{\xi}^2 e^{-2\varepsilon_1} \left(1 - \bar{\xi}^2 e^{-3\varepsilon_1}/8\right)} \right]} \quad (4.26)$$

Finalmente, imponiendo  $\partial\bar{\eta}^+/\partial\bar{\xi} = 0$  en la ecuación 4.26 obtenemos la expresión analítica para la frecuencia dominante  $\bar{\xi}_c$  en función de  $\bar{L}$ ,  $\varepsilon_1$  y  $m$ .

$$\bar{\xi}_c = e^{1,5\varepsilon_1} \left[ \frac{2(2+m) - 2m\sqrt{1 + 8e^{\varepsilon_1}(1+m)\bar{L}^2}}{1 - 2m^2\bar{L}^2 e^{\varepsilon_1}} \right]^{1/2} \quad (4.27)$$

## 4.2. Resultados

El programa de MATLAB R2012b se ha ampliado para incluir los cálculos necesarios en el análisis de perturbaciones. El nuevo módulo, que se muestra en la figura 4.2, nos permitirá analizar el impacto sobre el modelo de los distintos parámetros y llegar así a conclusiones interesantes sobre los principios que gobiernan el fenómeno de fragmentación:

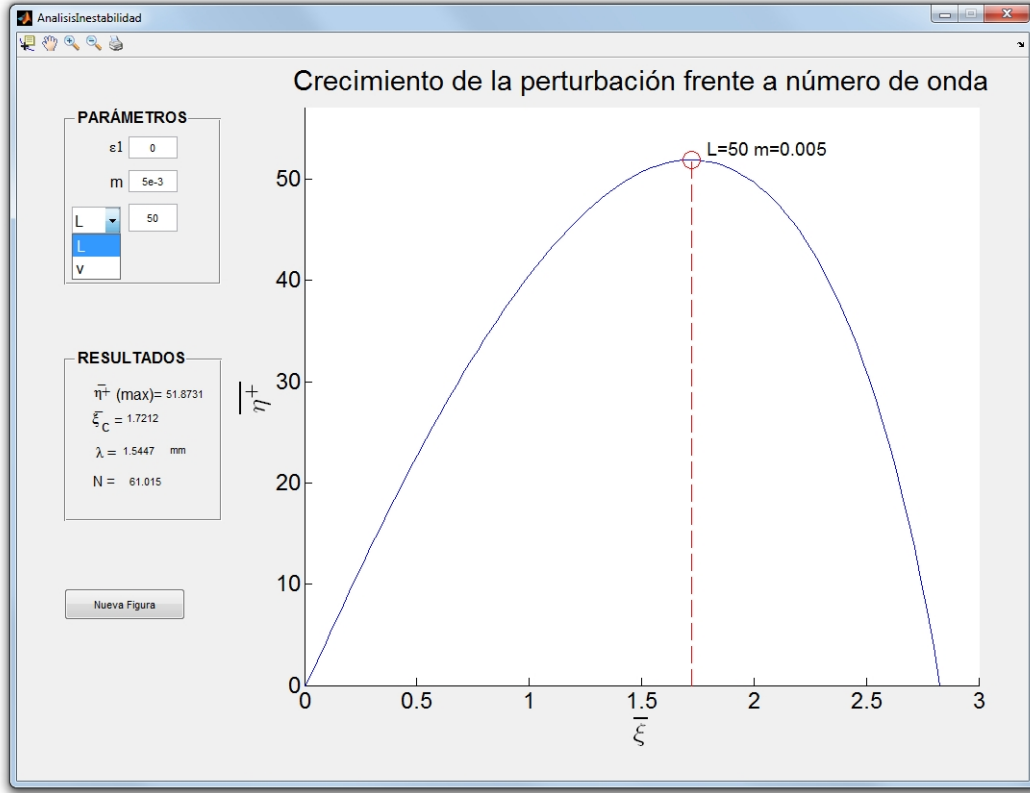


Figura 4.2: módulo de análisis de perturbaciones

Esta nueva herramienta nos permite modificar el valor de:

- Deformación para la cual introducimos la perturbación  $\varepsilon_1$ : el instante en que se inicia la estricción se puede calcular a partir del criterio de Considère (1885) si el material es insensible a la velocidad de deformación, o con el de Hart (1967) en otro caso. Sin embargo, para  $t = 0$  la tasa de crecimiento de la perturbación  $\bar{\eta}^+$  es suficientemente elevada y por tanto, como se discute en Rodríguez-Martínez et al. (2013b), podemos perturbar en  $\varepsilon_1 = 0$ .
- Parámetro de inercia  $\bar{L} = \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{\sigma_1}{\rho_0 \varepsilon_1^2}}$ : como ya hemos comentado este parámetro representa los efectos geométricos y de inercia en el sistema. Podemos dar valores tanto a  $\bar{L}$  como a  $v$  ya que para una geometría y material dados uno se puede calcular a partir del otro.
- Endurecimiento por velocidad de deformación  $m$ .

Para cada combinación de los parámetros anteriores, el software representa la tasa de crecimiento de la perturbación frente a la frecuencia de la misma, ambas adimensionales. La primera observación importante se deduce directamente de la forma de la función anterior: vemos como aparece una longitud de onda dominante y como el resto de perturbaciones se ven amortiguadas a medida que se alejan del máximo. Adelantamos que esta forma se debe al efecto amortiguador de la inercia sobre las longitudes de onda largas, y de la multiaxialidad de la tensión sobre las cortas. A continuación, emplearemos la interfaz para realizar variaciones en los parámetros del sistema analizando en cada caso la respuesta del modelo:

- En primer lugar, manteniendo un valor fijo de  $m$ , por ejemplo 0.01, vamos a ir variando el parámetro  $\bar{L}$ . Como puede observarse en la figura 4.3 a medida que  $\bar{L}$  disminuye, es decir a medida que la inercia del sistema crece, el número de onda crítico  $\bar{\xi}_c$  crece y el valor  $\bar{\eta}^+(max.)$  desciende. Resaltar que este aumento de la inercia puede deberse a 4 factores: un aumento de la velocidad de deformación, la densidad, el radio inicial de la sección o una disminución en el límite elástico.

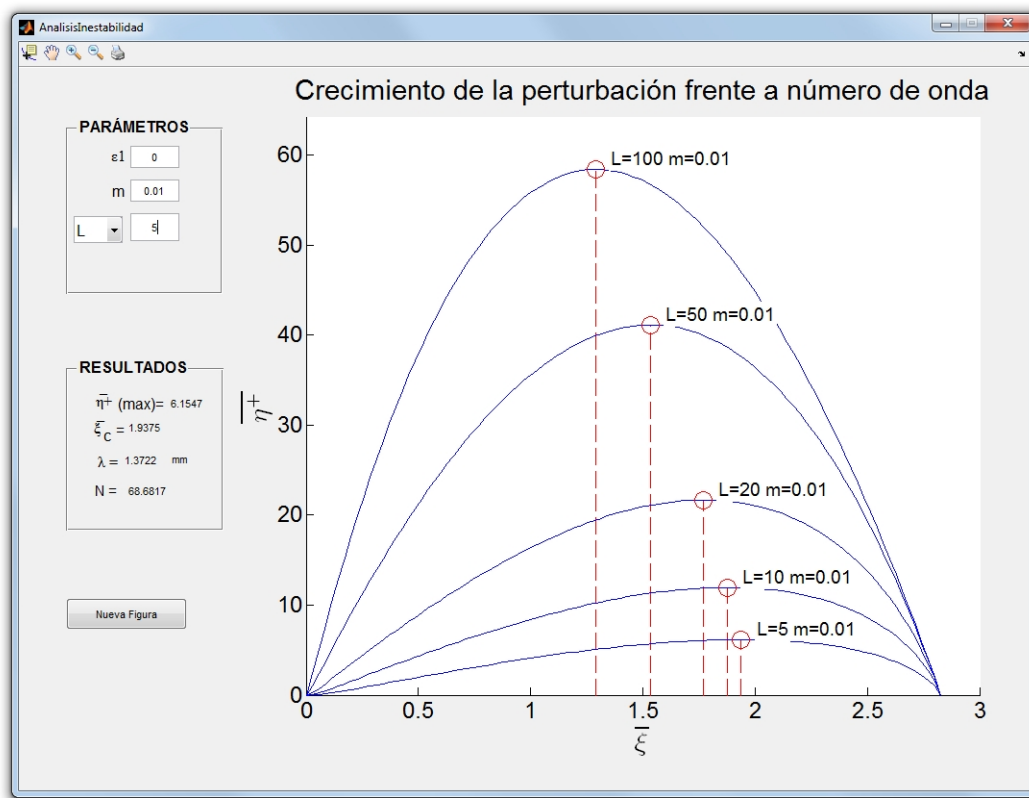


Figura 4.3: velocidad relativa de crecimiento para diferentes perturbaciones, influencia de  $\bar{L}$

Podemos deducir, por tanto, que la inercia tiene un papel estabilizador en el proceso, un aumento de  $\bar{\xi}_c$  quiere decir que aumenta el número de estricciones y un menor valor de  $\bar{\eta}^+(max.)$  implica que éstas crecen más lentamente.

- Si por el contrario mantenemos fijo el valor de  $\bar{L}$  y vamos aumentando progresivamente el valor de  $m$ , es decir, un aumento de la viscosidad del material, vemos que se reduce tanto  $\bar{\eta}^+(max.)$  como  $\bar{\xi}_c$  (figura 4.4). Esto implica, que en un material más viscoso las estricciones crecen más despacio y además el número de éstas es menor.

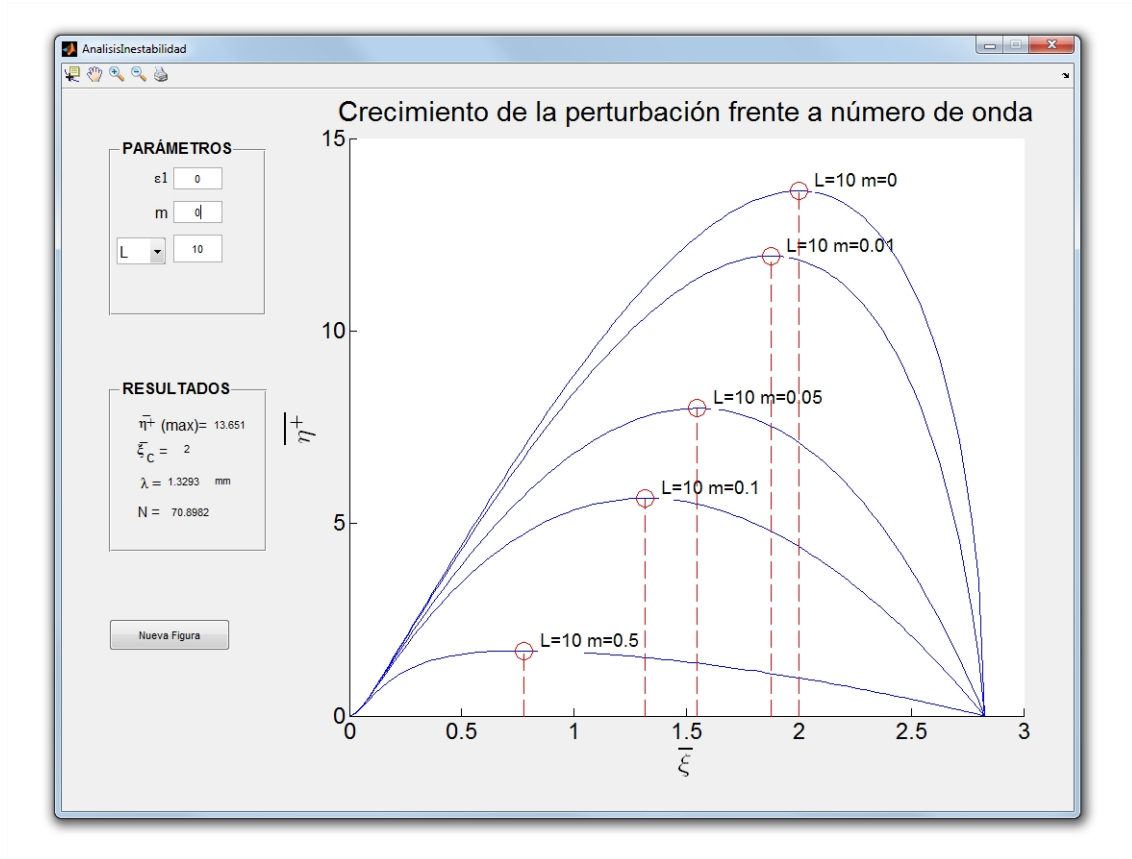


Figura 4.4: velocidad relativa de crecimiento para diferentes perturbaciones, influencia de la viscosidad  $m$

La figura 4.5 muestra la dependencia de la frecuencia de la perturbación dominante  $\bar{\xi}_c$ , con los dos parámetros anteriores: viscosidad del material  $m$  y parámetro de inercia  $\bar{L}$ . Observamos que en general  $\bar{\xi}_c$  decrece con el aumento de  $m$  y  $\bar{L}$ . Si el material es independiente de la velocidad de deformación ( $m=0$ ), el número de onda crítico es una constante  $\bar{\xi}_c = 2$  para cualquier valor de  $\bar{L}$ .



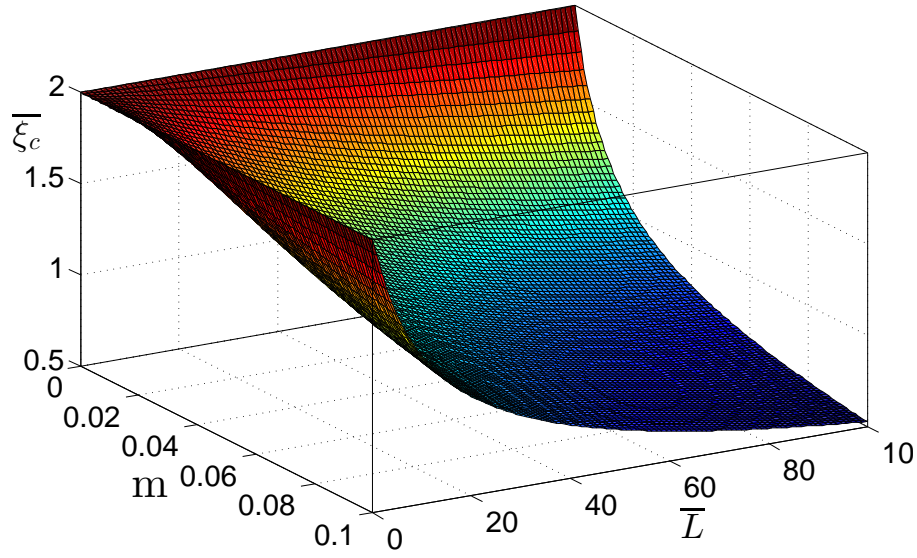


Figura 4.5: variación de  $\bar{\xi}_c$  con la viscosidad  $m$  y con la inercia  $\bar{L}$

Por último, como adelantábamos al inicio de esta sección, existe un tercer principio fundamental del proceso de fragmentación que se explica a partir de la expresión 4.25.

$$\bar{\xi} < 2\sqrt{2} e^{1,5\varepsilon_1} \quad (4.28)$$

La expresión anterior condiciona el valor mínimo de la longitud de onda que debe tener una perturbación para que ésta pueda crecer. Este efecto amortiguador de las longitudes de onda bajas, se debe al carácter multiaxial de la tensión en la zona de la estricción. El gradiente tensional a lo largo de la sección impone que deba existir una distancia mínima entre cuellos.



## Capítulo 5

# Fragmentación dinámica: simulación por elementos finitos

En este capítulo se presenta el análisis mediante elementos finitos del ensayo de expansión de anillos, para ello se emplea el programa comercial ABAQUS/Explicit 6.13. Cada uno de los modelos anteriormente descritos estudia una etapa distinta del proceso de fragmentación, la simulación mediante elementos finitos nos permitirá una óptica del fenómeno en su conjunto.

Una vez detallados los pormenores de la modelización se realizarán una serie de simulaciones con esta herramienta y se compararán los resultados con los obtenidos experimentalmente; sin embargo, mientras que las velocidades alcanzables en los experimentos están limitadas a unos 300 m/s, los elementos finitos nos permitirán cubrir un rango mucho mayor (de 80 a 1700 m/s en nuestro caso). Obtendremos así un set de datos suficientemente amplio con el que contrastar los resultados obtenidos con los modelos anteriores.

### 5.1. Modelización

Seguiremos con la misma configuración de geometría y material empleada a lo largo de este proyecto: 15 mm de radio interior y sección cuadrada de 0,75 mm. U6N elástico perfectamente plástico.

Se ha seleccionado un método explícito de integración en base a la alta no linealidad del problema. En un análisis implícito la solución se obtiene aplicando la carga gradualmente en distintos incrementos temporales, el coste computacional en cada uno de los pasos es elevado, sin embargo, su ventaja reside en que para problemas sin “fuertes” no linealidades, el número de pasos puede llegar a ser varios órdenes de magnitud menor que en el caso explícito. Por el contrario, una resolución explícita requiere incrementos temporales menores (mayor número de pasos) pero el coste computacional en cada incremento es bajo.

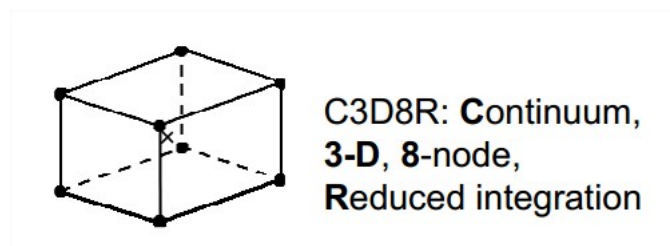
En un problema con altas velocidades de deformación como el que nos ocupa, la respuesta de la estructura variará rápidamente y será necesario emplear pequeños incrementos de tiempo aún para el método implícito, por lo que éste no es aconsejable.

En cuanto a las condiciones de contorno: impondremos una velocidad radial y constante aplicada en la cara interior del anillo. Además, es necesario incluir una velocidad inicial para todo el anillo (de igual magnitud y dirección que la anterior), ya que si en  $t=0$  el movimiento comenzase bruscamente se generaría una onda plástica de carga a lo largo del espesor del anillo que falsearía los resultados. En este punto hemos encontrado algunas dificultades pues ABAQUS/Explicit 6.13 no permite definir las condiciones iniciales en coordenadas polares, para solucionar el inconveniente se ha desarrollado un script en Python que descompone la velocidad radial en cartesianas nodo a nodo.

A continuación se detallan el resto de opciones consideradas durante la modelización.

### 5.1.1. Mallado

El anillo ha sido mallado empleando elementos hexaédricos de 8 nodos (interpolación lineal), formulación lagrangiana (el elemento se mueve con el material) y con un solo punto de integración: elemento C3D8R según notación de ABAQUS 6.13.



*Figura 5.1: elemento C3D8R*

Además, se ha seleccionado el método reducido de integración: la integración numérica estándar (cuadratura Gaussiana, dos puntos de integración en cada dirección, ocho en total) tiene algunos inconvenientes cuando el comportamiento del material es (aproximadamente) incompresible. Los desplazamientos en la malla pueden ser menores que en la realidad (este fenómeno es conocido como bloqueo volumétrico), es decir, la malla se comporta de forma más rígida de lo que debería (ABAQUS, 2013).

La alternativa al método anterior es la integración reducida (un solo punto de integración para un hexaedro de 8 nodos). Este método resuelve el bloqueo volumétrico y conlleva un coste computacional mucho menor (8 a 1 en el caso de hexaedros); sin embargo, presenta otro problema: los modos de deformación de energía nula o "Hourglass".

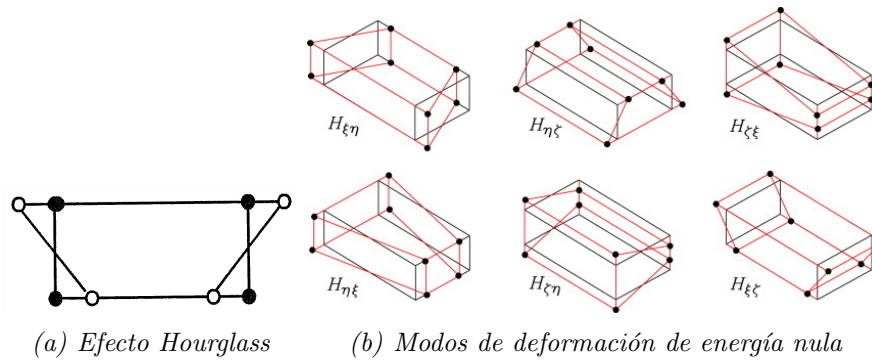
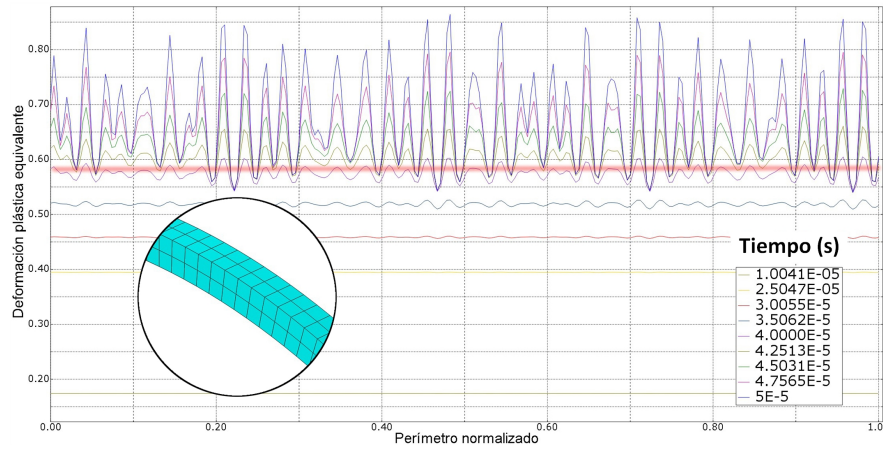


Figura 5.2: efecto Hourglass

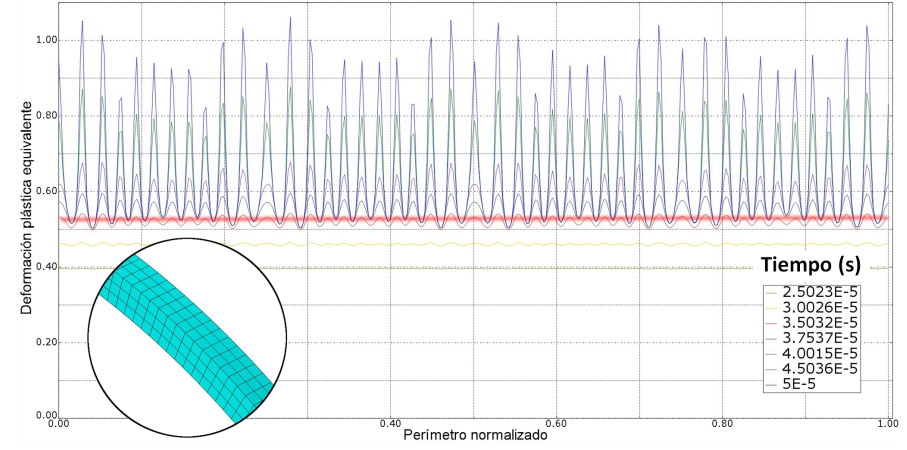
Imaginemos que uno de los elementos se deforma como se muestra en la figura 5.2(a), un solo punto de integración situado en el centro no detectará la deformación. Como vemos en la figura 5.2(b) existen varios de estos modos de deformación de energía nula. ABAQUS 6.13 permite al usuario seleccionar entre una serie de métodos para el control de este efecto, en el caso expuesto hemos elegido el método viscous con un factor 1 de escala.

Además, se ha llevado a cabo un **análisis de sensibilidad al mallado**. En concreto, se ha medido que la deformación plástica equivalente a partir de la cual aparece la inestabilidad y el número de estricciones tras el ensayo converjan convenientemente. Los resultados se muestran en la figura 5.3 donde: el eje de abscisas representa el perímetro normalizado del anillo mientras que en ordenadas tenemos la deformación plástica equivalente. Los colores indican el instante temporal (en segundos) como se recoge en la leyenda. La recta roja identifica la deformación a partir de la cual se inician las estricciones. Tras este análisis se ha optado por una malla con 5 nodos en dirección radial.

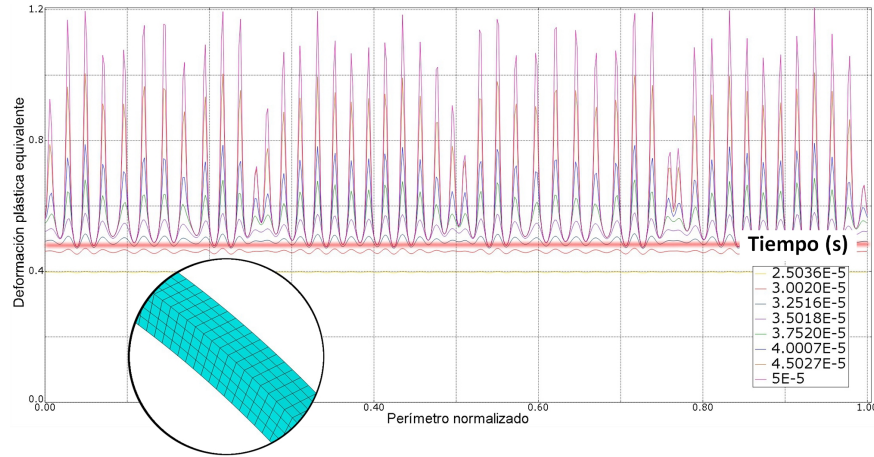
Finalmente, se han seguido las siguientes consideraciones a la hora de mallar: que la malla tenga simetría radial (ya que los elementos cúbicos se comportan mejor si esto se cumple), que la relación de aspecto en el elemento sea lo más próxima posible a 1:1:1 y que la dimensión del elemento sea al menos cinco veces menor que el menor de los tramos sin estricción.



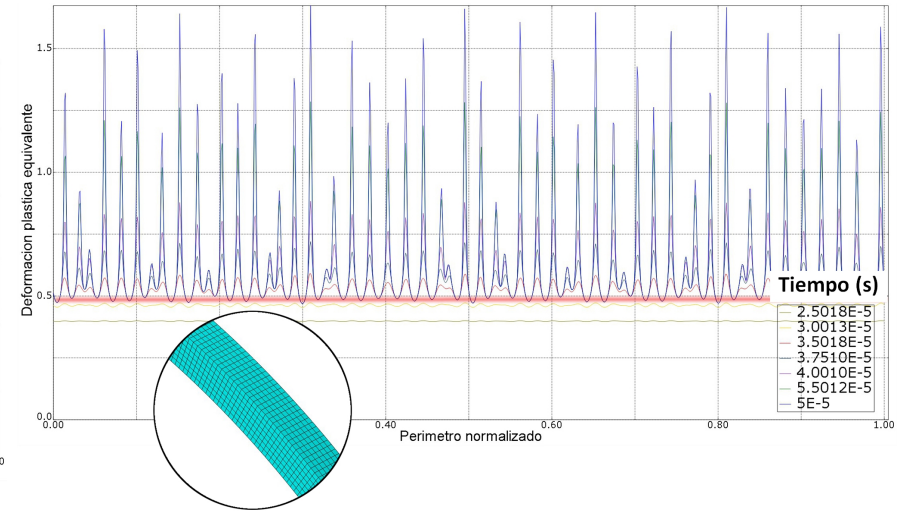
(a) Mallado con 2322 nodos, 1032 elementos.  $\varepsilon_{loc}^p = 0,58$ ; 39 estricciones



(b) Mallado con 6144 nodos, 3456 elementos.  $\varepsilon_{loc}^p = 0,53$ ; 44 estricciones



(c) Mallado con 12850 nodos, 8224 elementos.  $\varepsilon_{loc}^p = 0,5$ ; 44 estricciones



(d) Mallado con 57728 nodos, 44198 elementos.  $\varepsilon_{loc}^p = 0,5$ ; 44 estricciones

Figura 5.3: analisis de sensibilidad al mallado, simulaciones a 300 m/s. En el eje de abcisas se muestra el perímetro normalizado del anillo mientras que en ordenadas tenemos la deformación plástica equivalente. Los colores representan el instante temporal (en segundos) como se recoge en la leyenda. La recta roja identifica la deformación a partir de la cual se inician las estricciones.

### 5.1.2. Incertidumbre y localización

Podríamos pensar que si ABAQUS 6.13 va a resolver las ecuaciones constitutivas y de balance discretizadas para cada elemento, el modelo debería expandirse de forma indefinida sin que apareciese estricción alguna, tal y como ocurre en la solución homogénea del método de estabilidad; sin embargo, durante la simulación los resultados numéricos se truncan parcialmente en cada iteración, es decir, aparece un cierto error numérico.

La acumulación de estos errores es suficiente para perturbar los campos de tensión y deformación y propiciar la localización. Destacar que, aunque esta acumulación de errores propicia la localización, la naturaleza del patrón de estricciones es determinista como se discute en Rodríguez-Martínez et al. (2013a).

### 5.1.3. Criterio de fallo

Para describir apropiadamente la fragmentación del anillo es necesario fijar un criterio de fallo. Una solución efectiva a este problema consiste en fijar un valor constante de deformación plástica equivalente a partir del cual se elimina el elemento en cuestión (Rusinek and Zaera, 2007). Sin embargo, este criterio resulta problemático ya que a bajas velocidades (típicamente entre 50 y 300 m/s) la deformación a la que se produce la fractura es fuertemente dependiente de la velocidad de expansión, y sería necesario un análisis de la sensibilidad del modelo en cada simulación a distintas deformaciones de fallo.

Para los objetivos de este proyecto, renunciaremos a una determinación exhaustiva de la deformación de fallo y solo impondremos que ésta sea lo suficientemente grande para permitir la localización y el desarrollo de las estricciones. Esta deformación se ha estimado efectuando en primer lugar una simulación sin criterio alguno de fallo, en la cual se determina la deformación a la que se inicia la localización; se impone que la deformación de fractura sea un 50 % superior. Seguidamente, se ha repetido la simulación con este valor como deformación de rotura.

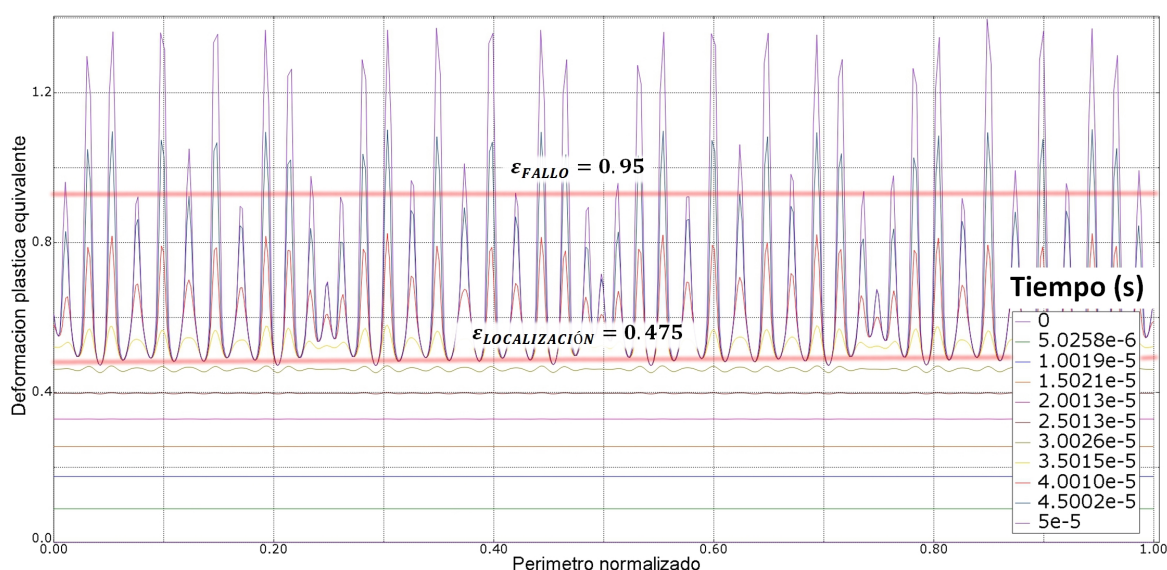


Figura 5.4: deformación plástica equivalente frente al perímetro normalizado del anillo para la simulación a 300 m/s. Las rectas rojas identifican las deformaciones de localización y fractura.



La implementación de este criterio de fallo en ABAQUS/Explicit 6.13 se ha realizado de forma que al alcanzarse la deformación de fallo, el elemento pierda de inmediato su capacidad de soportar carga.

En conclusión, la evolución de la tensión y la deformación en un elemento que falle quedará como se muestra en la figura 5.5. Se aprecia el comportamiento elástico perfectamente plástico en la tensión (azul), siendo la parte elástica prácticamente despreciable. En cuanto a la deformación plástica equivalente (verde), crece progresivamente hasta el valor seleccionado como deformación de rotura (en este caso 1). En este punto se retira el elemento del conjunto: la deformación se estabiliza, pues el elemento ya no se deforma más y la tensión cae a cero, ya que deja de soportar carga alguna.

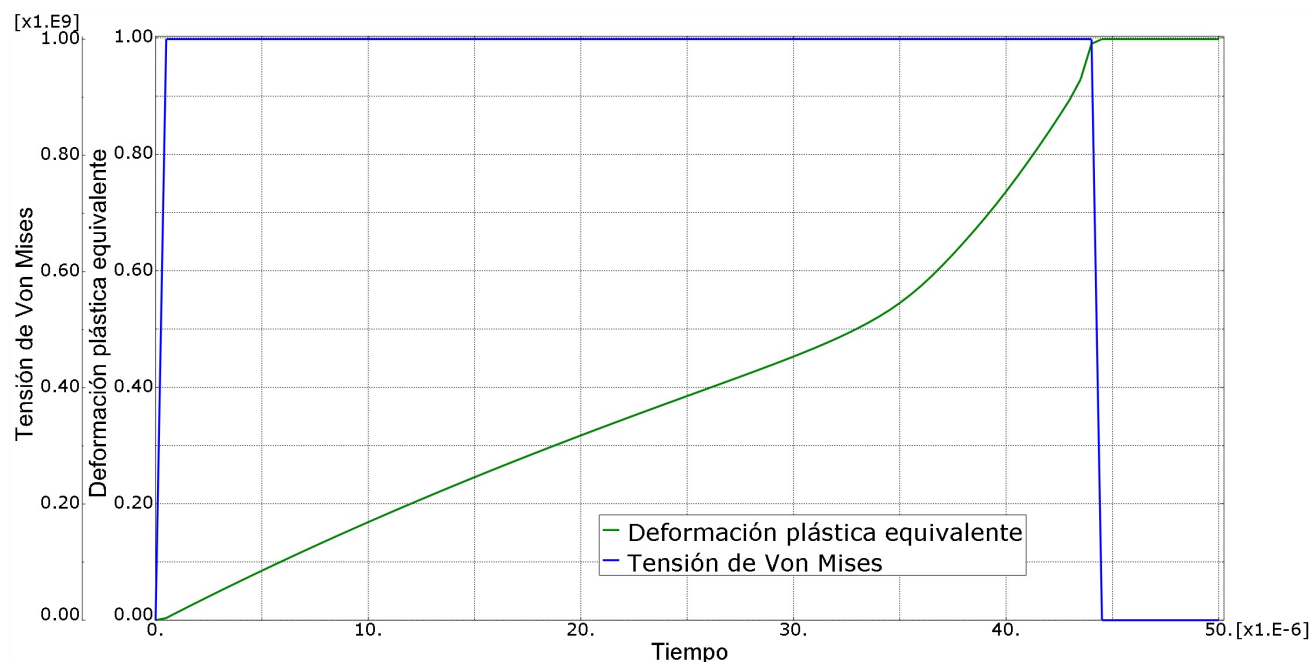


Figura 5.5: evolución de la tensión y la deformación en un elemento representativo



## 5.2. Resultados

La figura 5.6 presenta los resultados obtenidos, en particular se observa la deformación plástica equivalente para una simulación a  $v=300$  m/s. Apreciamos como algunas estricciones han progresado hasta romper, mientras otras se han descargado antes de hacerlo.

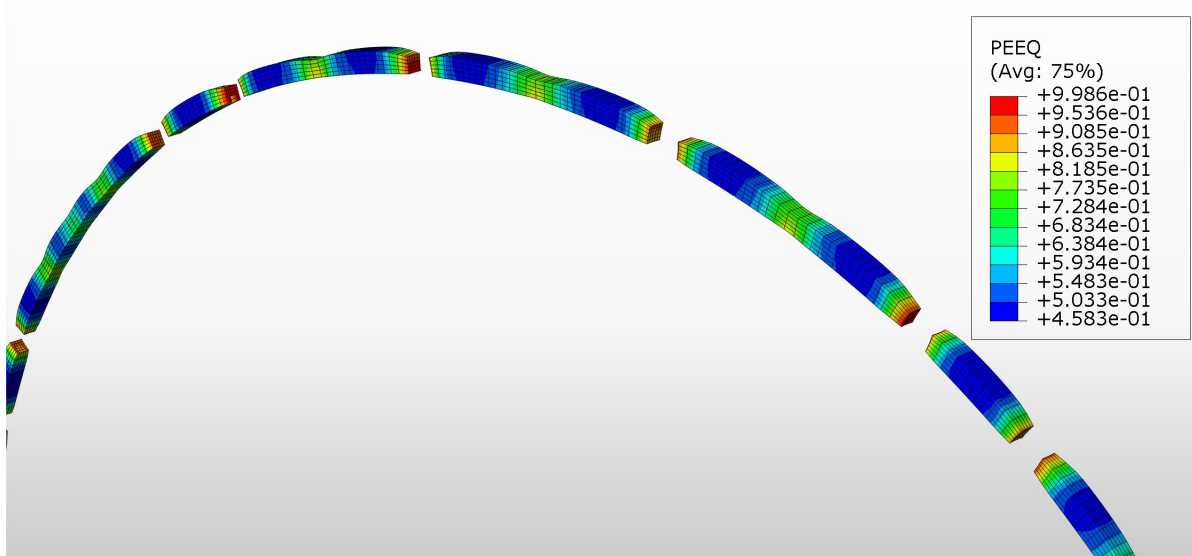


Figura 5.6: simulación por elementos finitos del ensayo a 300 m/s

Una forma mejor de presentar los resultados anteriores consiste en representar el perímetro normalizado del anillo en el eje de abscisas y la deformación plástica equivalente en el eje de ordenadas. Esta configuración puede observarse en la figura 5.7 donde, además, queda reflejada por colores la evolución de la deformación en el tiempo.

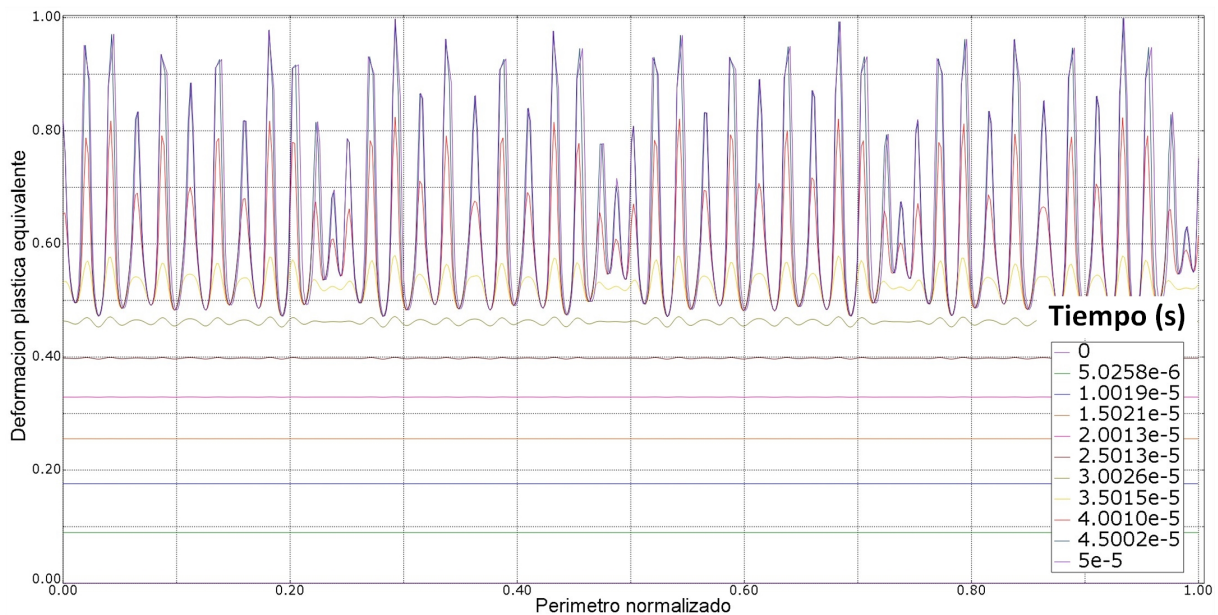


Figura 5.7: evolución temporal de la deformación plástica equivalente a lo largo del perímetro.

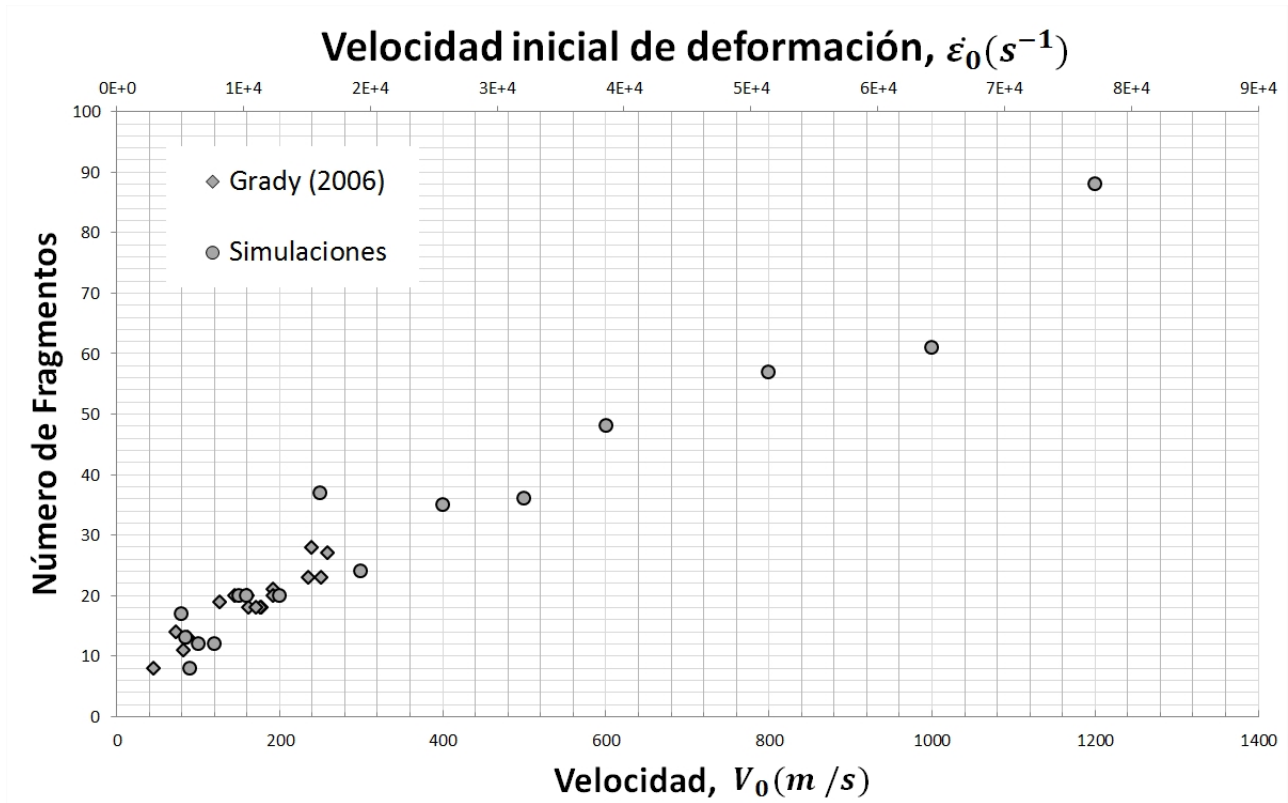
En la figura anterior podemos apreciar como la deformación crece de forma constante en los primeros instantes de la expansión. Para  $t = 30 \mu s$  el campo de deformaciones muestra ya pequeñas perturbaciones, algunas de las cuales progresarán propiciando la localización de las estricciones. En este ensayo se han contado hasta 48 estricciones de las cuales sólo 24 han progresado hasta rotura.

Se han llevado a cabo simulaciones para velocidades de 80 a 1700 m/s, en cada caso se ha calculado a través de ABAQUS 6.13 la masa de cada fragmento. La figura 5.8 muestra el resumen de los datos recogidos: a la izquierda están los valores de: velocidad, deformación plástica equivalente elegida en el criterio de fallo, número de fragmentos y número de estricciones; mientras que a la derecha encontramos, a modo de ejemplo, las distribuciones de masas para las simulaciones 8 y 9.

Número de simulación	Velocidad de expansión (m/s)	Deformación plástica equivalente de fallo	Número de fragmentos	Número de estricciones	Distribuciones de masas (g)	
					Simulación 8	Simulación 9
1	80	0,35	17	32	64,2E-3	63,1E-3
2	85	0,4	13	32	63,8E-3	62,9E-3
3	90	0,42	8	32	63,4E-3	61,6E-3
4	100	0,45	12	40	63,4E-3	57,3E-3
5	120	0,55	12	40	63,0E-3	39,5E-3
6	150	0,6	20	44	62,8E-3	39,4E-3
7	160	0,6	20	44	61,9E-3	39,4E-3
8	200	0,8	20	44	61,9E-3	39,4E-3
9	250	0,9	37	44	59,8E-3	39,4E-3
10	300	0,95	24	48	59,8E-3	39,4E-3
11	400	1,2	35	49	59,8E-3	23,4E-3
12	500	1,3	36	65	59,8E-3	23,4E-3
13	600	1,5	48	67	20,4E-3	21,9E-3
14	800	1,6	57	71	20,4E-3	21,9E-3
15	1000	1,75	61	87	20,4E-3	21,9E-3
16	1200	1,75	88	92	20,4E-3	20,4E-3
17	1500	1,75	93	107	20,4E-3	20,4E-3
18	1700	1,75	100	112	20,4E-3	20,4E-3
					20,4E-3	20,4E-3
						19,9E-3
						19,6E-3
						19,3E-3
						19,1E-3
						19,0E-3
						19,0E-3
						19,0E-3
						19,0E-3
						19,0E-3
						19,0E-3
						19,0E-3

Figura 5.8: resumen de los resultados obtenidos mediante las simulaciones

La figura 5.9 muestra la comparativa entre los resultados experimentales de Grady (2006) y los obtenidos mediante simulación numérica. Se aprecia como la simulación nos permite ampliar el rango de velocidades más allá de las alcanzables experimentalmente, y como en la zona común los datos concuerdan satisfactoriamente.





# Capítulo 6

## Discusión

Como mencionábamos en la introducción, de los resultados experimentales se deducen ciertos patrones que caracterizan el fenómeno de fragmentación:

- En primer lugar se observa que una mayor velocidad de expansión conlleva una mayor deformación antes del fallo. El análisis de estabilidad explica satisfactoriamente este patrón: veíamos como un aumento de la inercia del sistema o un aumento de la viscosidad provocan una reducción de la tasa de crecimiento de las perturbaciones. Si las perturbaciones crecen más despacio, podrá alcanzarse una mayor deformación antes del fallo.
- Otro fenómeno que se observa en los ensayos es que el número de estricciones y fragmentos crece al aumentar la velocidad. Las expresiones para el número de fracturas que se deducen de las teorías estadística y energética recogen esta relación. Además, en el análisis de estabilidad se justifica como un incremento de la inercia aumenta el número de estricciones mientras que un incremento de la viscosidad las reduce.
- Por último, también se observa que el número de estricciones es mayor al de fragmentos debido al efecto de las ondas de relajación. Las ondas de descarga dominan el fenómeno a bajas velocidades, sin embargo, a medida que aumentamos la velocidad este efecto se reduce por los siguientes motivos:
  - El espacio que pueden recorrer estas ondas decrece, recordemos que  $x(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2Y\varepsilon}{\rho\varepsilon^2}}$  es inversamente proporcional a  $v$
  - A mayor velocidad se generan más ondas, puesto que se producen más fracturas, por tanto, la interferencia entre ondas aumenta.

Así, para velocidades altas, la descarga llega a ser mínima y las ondas no pueden viajar lo suficientemente lejos como para inhibir la nucleación de las estricciones vecinas.

La importancia de las ondas de descarga condiciona la capacidad predictiva de los distintos modelos. Así, las teorías estadística y energética en las que estas ondas juegan un papel fundamental, predicen mejor los resultados a bajas velocidades. La figura 6.1 compara las predicciones de Mott y Grady con el número de fragmentos obtenidos experimentalmente y mediante las simulaciones numéricas, apreciamos como efectivamente las teorías pierden capacidad predictiva a medida que crece la velocidad.

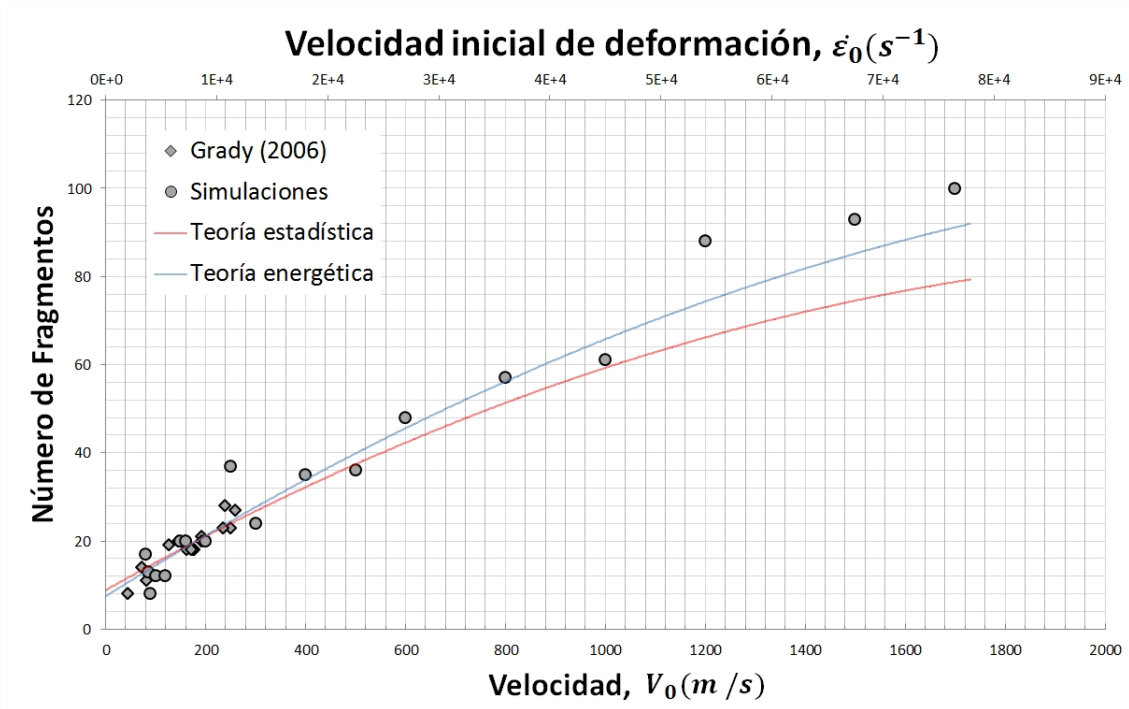


Figura 6.1: número de fragmentos frente a velocidad de expansión

Por otra parte, la figura 6.2 muestra la longitud de onda de la perturbación dominante según el análisis de perturbaciones, y la distancia promedio normalizada entre estricciones obtenida de las simulaciones numéricas;  $L_0$  se obtiene dividiendo el perímetro del anillo entre el número de estricciones mientras que  $e_0$  es el lado de la sección del anillo. En este caso se aprecia como el análisis de perturbaciones, que no contempla la propagación de ondas, predice mejor los ensayos a medida que crece la velocidad.

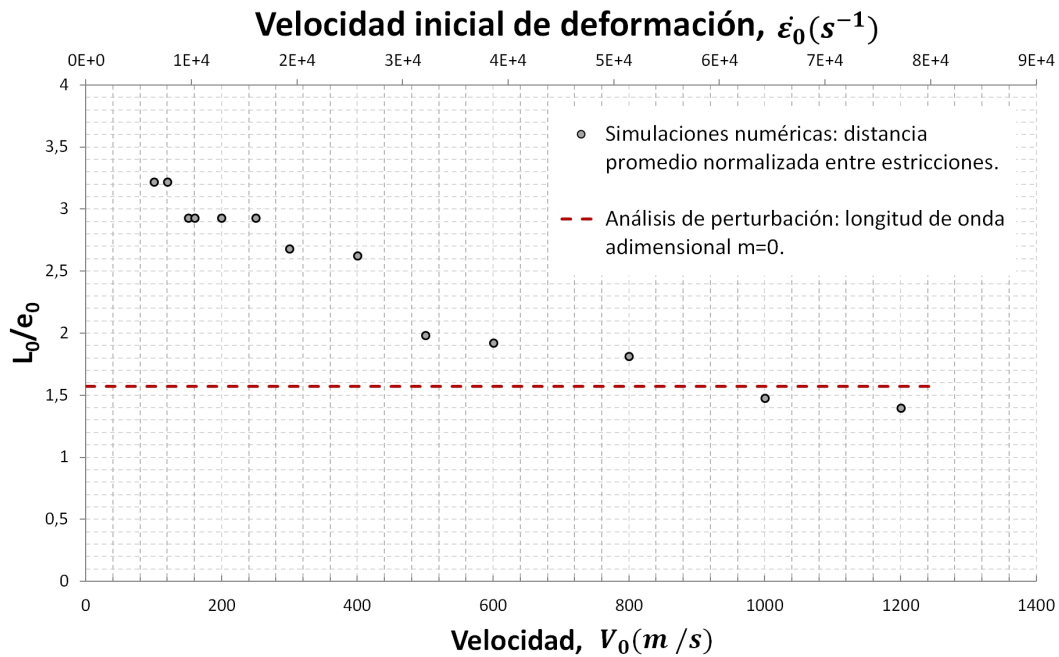


Figura 6.2: comparativa entre los resultados del análisis de perturbación y las simulaciones

Lo anterior sugiere, que si la velocidad de carga es suficientemente alta el proceso de fragmentación puede llegar a perder cualquier dependencia estadística y volverse determinístico (Rodríguez-Martínez et al., 2013b).

La figura 6.3 muestra la distancia media normalizada entre estricciones junto con el tamaño medio y normalizado de los fragmentos. Siguiendo Rodríguez-Martínez et al. (2013b) podemos distinguir las siguientes dos zonas:

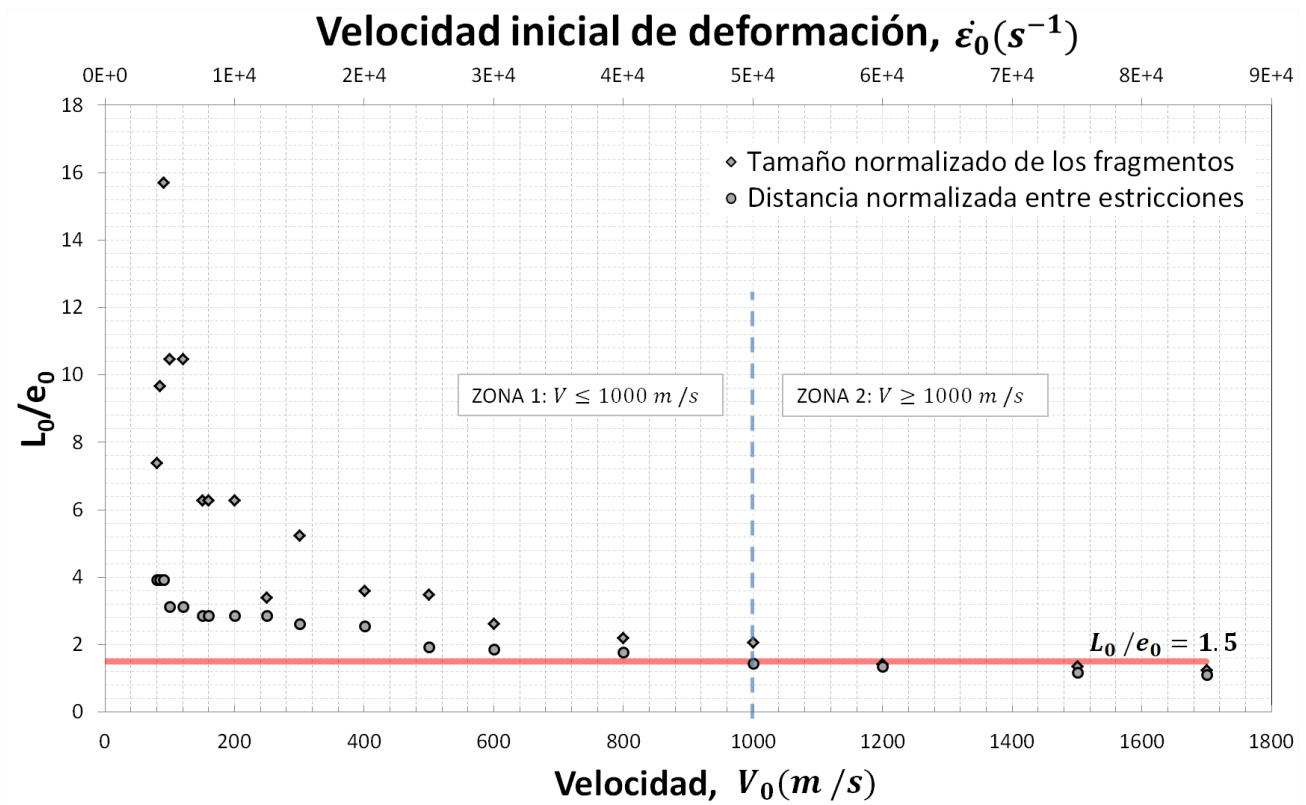
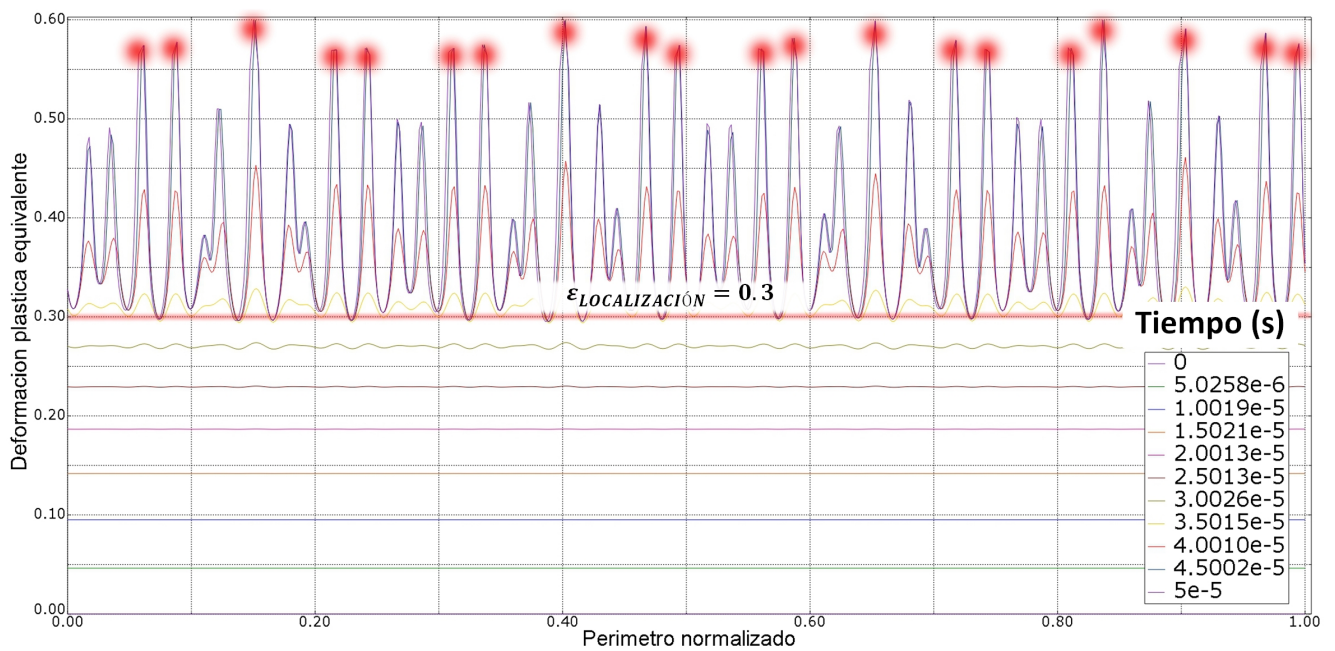


Figura 6.3: resultados de las simulaciones por elementos finitos. Longitud media de fragmento normalizada y longitud media entre estricciones normalizada frente a la velocidad de expansión y la velocidad inicial de deformación.  $L_0$  medido en la configuración sin deformar

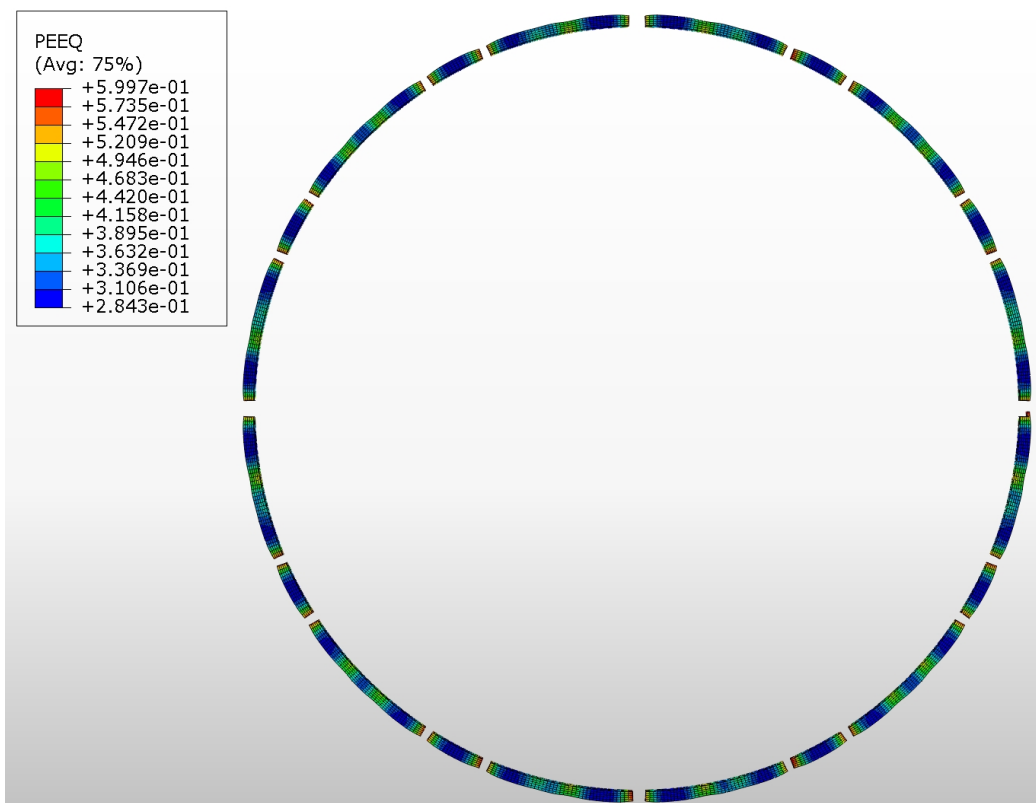
- Zona 1, por debajo de los 1000 m/s: el proceso de fragmentación está dominado por las ondas de descarga.

El número de fragmentos será considerablemente menor que el número de estricciones, debido a que las ondas detienen el crecimiento de las mismas (ver figura 6.4). Igualmente, el análisis de estabilidad predice en esta zona un mayor número de estricciones que las que realmente se forman, ya que no tiene en cuenta el efecto de las ondas.

Finalmente, el comportamiento estadístico tanto espacial como temporal de las fracturas y el dominio de las ondas de descarga conllevan que las teorías estadística y energética funcionen adecuadamente en esta zona, ajustándose las distribuciones analíticas de Grady adecuadamente a los resultados (figura 6.5).



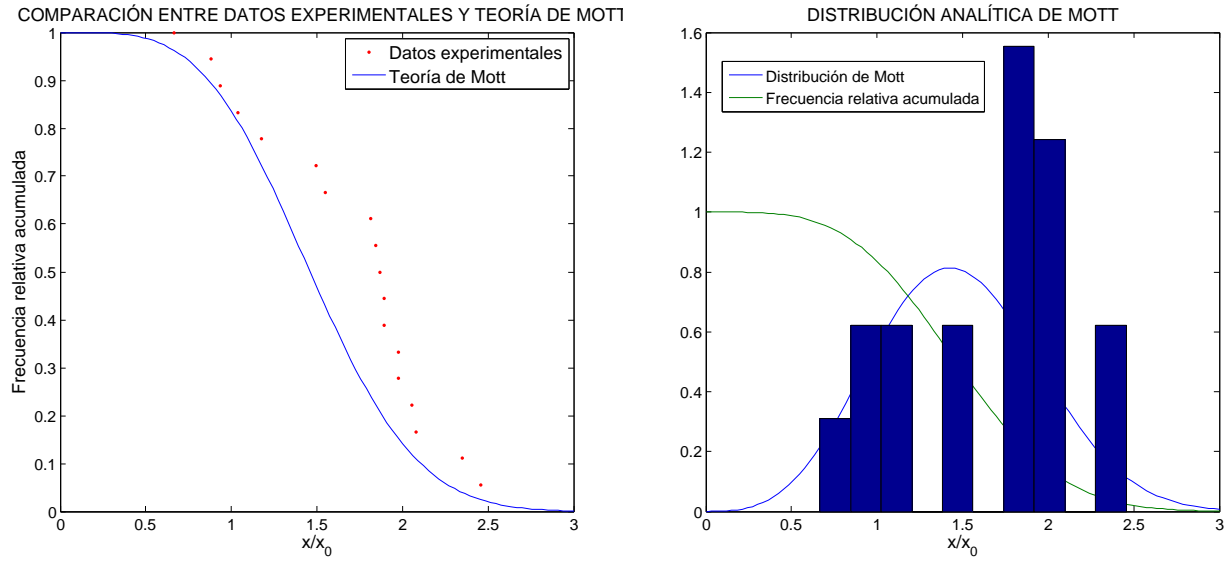
(a) Deformación plástica equivalente frente al perímetro normalizado del anillo. Ensayo a 160 m/s, se contabilizaron un total de 44 estricciones y tan solo 20 fracturas



(b) Imagen de la deformación plástica equivalente del anillo en su configuración final

Figura 6.4: simulación por elementos finitos del ensayo de expansión de anillos a 160 m/s





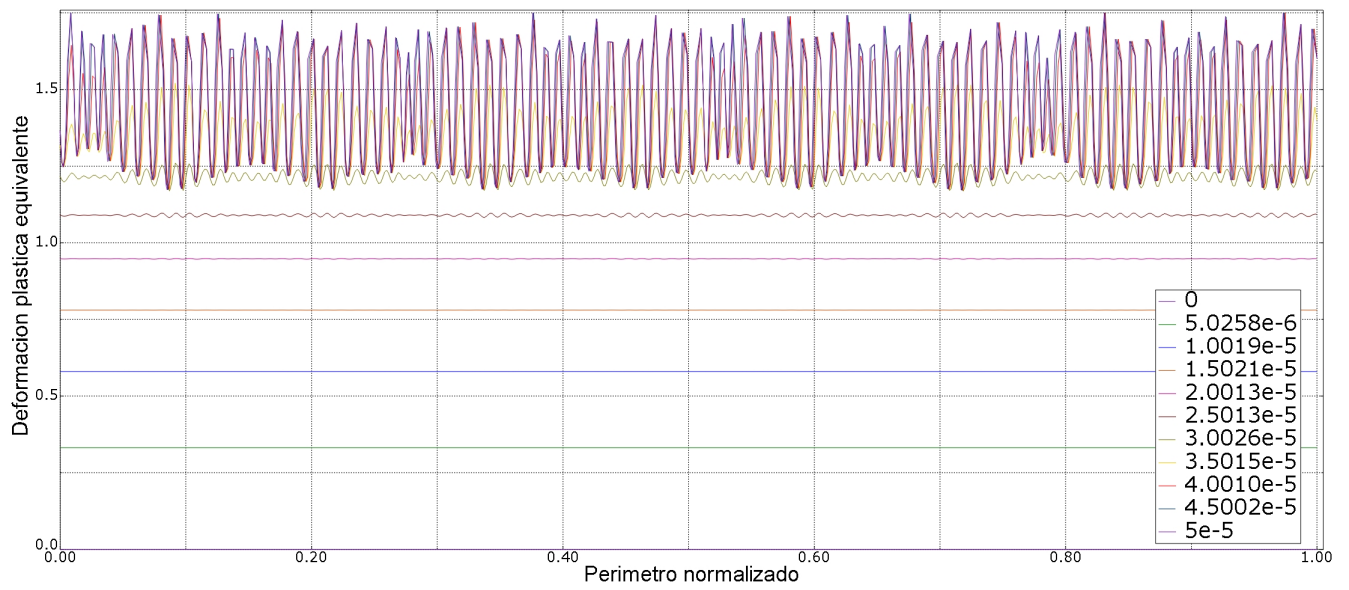
(a) Frecuencia relativa acumulada: expresión analítica (b) Ecuaciones analíticas de Grady junto con el histograma resultante de los valores experimentales

Figura 6.5: distribuciones estadísticas para el tamaño de los fragmentos, ensayo a 162,2 m/s. Comparativa entre los datos experimentales y la teoría de N.F.Mott.

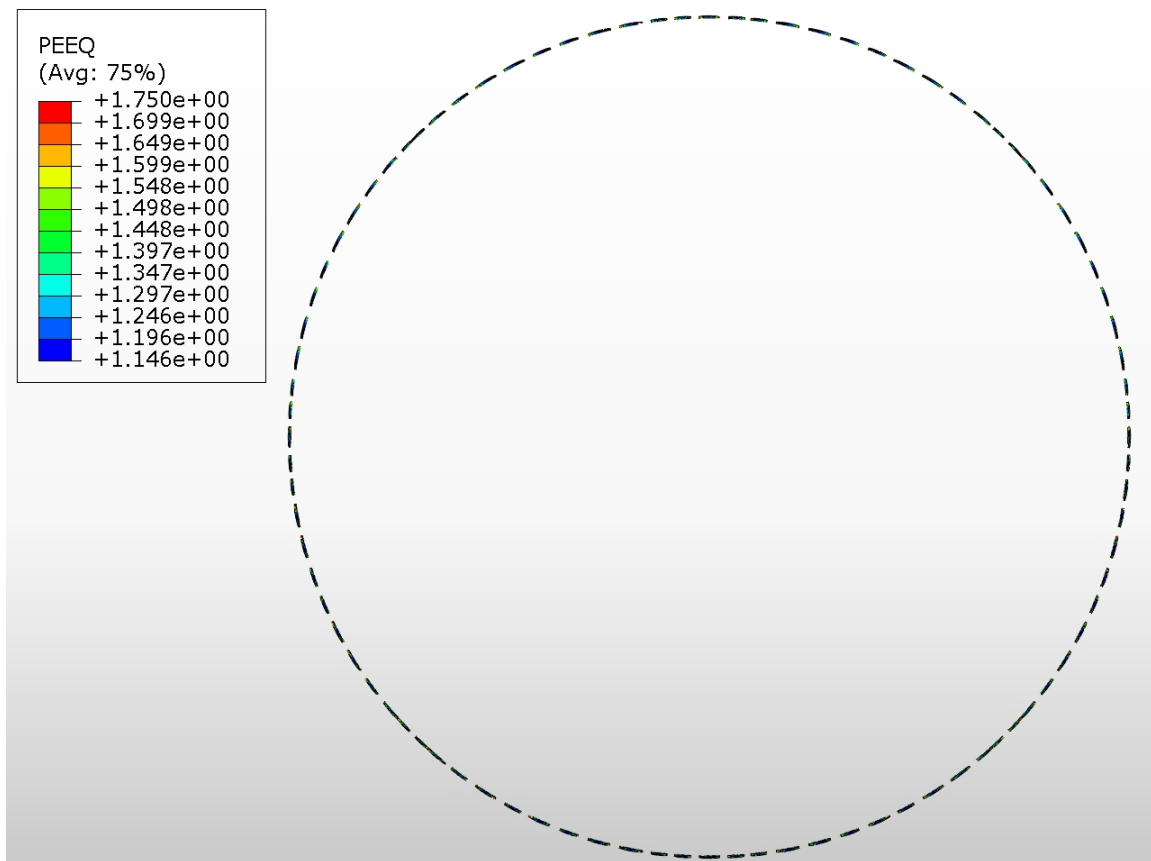
- Zona 2, a partir de los 1000 m/s: el efecto de las ondas de descarga se vuelve inapreciable.

Esto supone que el desarrollo de las estricciones no está limitado y que en la práctica todas ellas pueden progresar hasta fractura. Si contamos el número de estricciones en la figura 6.6(a) observamos que coincide con el número de fragmentos de la figura 6.6(b). Por tanto, tenemos que el análisis de estabilidad predice de forma adecuada en esta zona el número de estricciones y además éste coincide con el número de fracturas (aproximadamente).

Por último, observamos que una vez eliminado el efecto de las ondas de descarga, el número de estricciones (igual al de fragmentos) no sigue aumentando de forma indefinida, sino que el tamaño promedio normalizado de fragmento tiende asintóticamente a  $L_0/e_0 = 1,5$ .



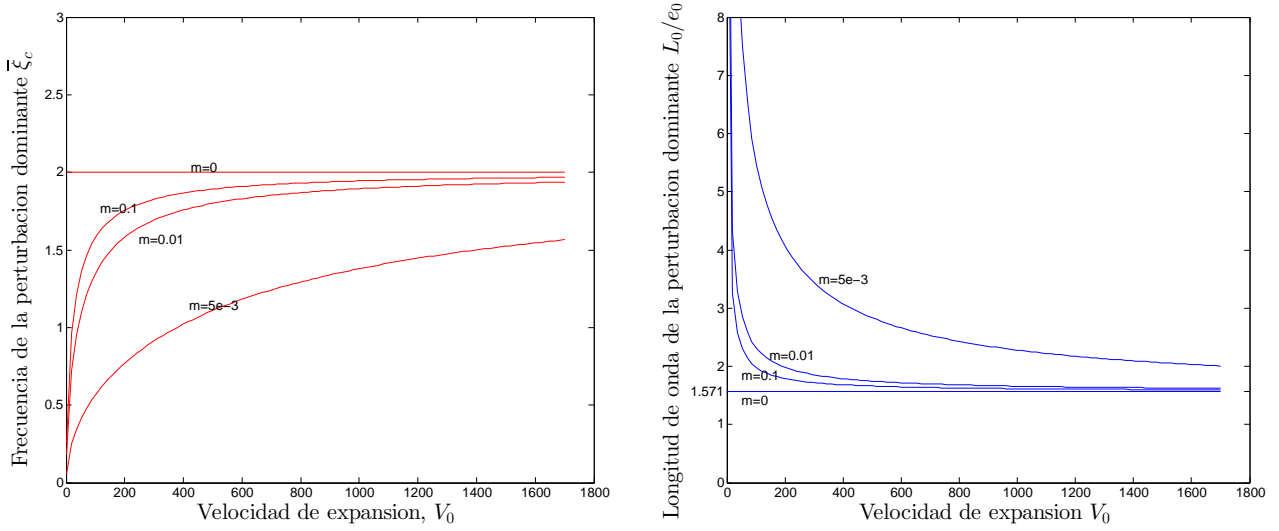
(a) Deformación plástica equivalente frente al perímetro normalizado del anillo. Ensayo a 1200 m/s, se contabilizaron un total de 92 estricciones y 88 fracturas



(b) Imagen del anillo en su configuración final

Figura 6.6: simulación por elementos finitos del ensayo de expansión de anillos a 1200 m/s

Este comportamiento asintótico se explica apropiadamente desde el análisis de estabilidad. La figura 6.7(a) muestra la evolución con la velocidad de la frecuencia de la perturbación dominante, vemos como, con independencia de la viscosidad del material (parámetro  $m$ ), la frecuencia de la perturbación dominante tiende a 2 para velocidades altas. Por tanto, la longitud de onda adimensional  $L_0/e_0 = \pi/\bar{\xi}_c$  tiende a  $\pi/2$  (figura 6.7(b)). El valor es ligeramente mayor al 1.5 obtenido de las simulaciones, esto se debe a que estamos introduciendo la perturbación en  $\varepsilon_1 = 0$ , para valores mayores de  $\varepsilon_1$  el valor de la asíntota disminuye.



(a) Frecuencia de la perturbación dominante frente a la velocidad de expansión (b) Longitud de onda de la perturbación dominante frente a la velocidad de expansión

Figura 6.7: Tendencia asintótica de la frecuencia dominante y del espaciado entre estricciones según el análisis de perturbaciones



# Capítulo 7

## Conclusiones y trabajos futuros

El estudio del proceso de fragmentación dinámica desarrollado en este trabajo, permite llegar a las siguientes conclusiones:

1. Teorías estadística y energética: se centran en el estudio de la fractura, proporcionando información sobre el número y tamaño de los fragmentos. Sus resultados son representativos cuando la propagación de ondas juega un papel fundamental en el proceso de fragmentación, es decir, a *bajas* velocidades.
2. Análisis lineal de perturbación: se basa en la modelización del proceso de localización múltiple. Proporciona información sobre el papel que juega la inercia, la multiaxialidad del flujo tensional y las ecuaciones constitutivas. Al no contemplar la propagación de ondas, sus resultados son representativos a *altas* velocidades.
3. Simulaciones por elementos finitos: permiten abarcar tanto el proceso de localización de la deformación como el de fractura múltiple. Se pone de manifiesto que los resultados coinciden con las teorías estadística y energética a *bajas* velocidades, y con el análisis lineal de perturbaciones a *altas* velocidades.

La modelización del ensayo de expansión de anillos desde las tres metodologías anteriores, permite una perspectiva global del proceso de fragmentación dinámica unidimensional. En esta visión, la inercia, multiaxialidad de la tensión, ecuaciones constitutivas y la propagación de las ondas de descarga, se presentan como los principios fundamentales que rigen el fenómeno.

En cuanto a trabajos futuros encaminados a avanzar en esta área de conocimiento, se proponen las siguientes líneas:

1. Avanzar en el desarrollo de modelos analíticos capaces de explicar el proceso de fragmentación dinámica unidimensional para cualquier velocidad de deformación.
2. Plantear modelos materiales más representativos que incluyan, tanto relaciones constitutivas más completas como modelos de daño continuo.
3. Y por último, explorar la modelización de problemas con geometrías bidimensionales o tridimensionales.



# Bibliografía

- ABAQUS, 2013. Getting Started with Abaqus: Keywords Edition. Dassault Systèmes Simulia Corp.
- Considère, A. G., 1885. L'emploi du fer de l'acier dans les constructions. *Annals Ponts Chaussées* 9, 574–575.
- Grady, D., 2002. Fragmentation of expanding cylinders and the statistical theory of n.f.mott. American Institute of Physics.
- Grady, D., 2006. Fragmentation of Rings and Shells, The Legacy of M.F.Mott. Springer.
- Grady, D. E., 1982. Local inertial effects in dynamic fragmentation. *Journal of Applied Physics* 53.
- Grady, D. E., Benson, D. A., 1983. Fragmentation of metal rings by electromagnetic loading. *Experimental Mechanics*.
- Grady, D. E., Kipp, M. E., 1985. Mechanisms of dynamic fragmentation: factors governing fragment size. *Mechanics of Materials* 4, 311–320.
- Grady, D. E., Kipp, M. E., 1997. Fragmentation properties of metals. *International Journal of Impact Engineering* 20, 293–308.
- Grady, D. E., Olsen, M. L., 2003. A statistics and energy based theory of dynamic fragmentation. *International Journal of Impact Engineering* 29, 293–306.
- Hart, E. W., 1967. *Acta Metall* 15, 351–355.
- Hill, R., Hutchinson, J., 1975. Bifurcation phenomena in the plane tension test. *Journal of the Mechanic and Physics of Solids* 23, 239–264.
- Mott, N. F., 1943. Fragmentation of h. e. shells: A theoretical formula for the distribution of weights of fragments. Ministry of Supply.
- Mott, N. F., 1947. Fragmentation of shell cases. *Proceedings of the Royal Society* 189, 300–308.
- Niordson, F. L., 1965. A unit for testing materials at high strain rates. *Experimental Mechanics* 5, 29–32.
- Rodríguez-Martínez, J. A., Vadillo, G., Fernández-Sáez, J., 2013a. On the complete extinction of selected imperfection wavelengths in dynamically expanded ductile rings. *Mechanics of Materials* 60, 107–120.

- Rodríguez-Martínez, J. A., Vadillo, G., Fernández-Sáez, J., Molinari, A., 2013b. Identification of the critical wavelength responsible for the fragmentation of ductile rings expanding at very high strain rates. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 61, 1357–1376.
- Rusinek, A., Zaera, R., 2007. Finite element simulation of steel ring fragmentation under radial expansion. *International Journal of Impact Engineering* 34, 799–822.
- Sharpe, W. N. (Ed.), 2008. *Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics*. Springer.
- Vadillo, G., Rodríguez-Martínez, J. A., Fernández-Sáez, J., 2012. On the interplay between strain rate and strain rate sensitivity on flow localization in the dynamic expansion of ductile rings. *International Journal of Solids and Structures* 49, 481–491.
- Zhang, H., Ravi-Chandar, K., 2006. On the dynamics of necking and fragmentation-i.real-time and post-mortem observations in Al6061-O. *International Journal of Fracture* 142, 183–217.
- Zhou, F., Molinari, J., Ramesh, K., 2006. An elastic-visco-plastic analysis of ductile expanding ring. *International Journal of Impact Engineering* 33, 880–891.